Université de Rennes 1 — MIEE L1
Année 2013-2014 — Module AN1 : Groupe 6,7,9

Contrôle continu 5
2 Décembre 2013

Exercice 1.
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 (x+2)\cos(x^2+4x+1)dx.$$

Corrigé :

$$\int_0^1 (x+2)\cos(x^2+4x+1)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+4)\cos(x^2+4x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^6 \cos(u)du = \frac{1}{2}(\sin(6)-\sin(1))$$

avec le changement de variable $\varphi(x) = x^2+4x+1$, $\varphi'(x) = 2x+4$ et car une primitive de $\cos(x)$ est $\sin(x)$.

Exercice 2.

1- Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle suivante

$$y^{'} + y = 0. \tag{1}$$

2- Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y^{'} + y = \frac{1}{1+e^x}. \tag{2}$$

3- Déduire de ce qui précède la solution de l'équation (2) telle que $y(0) = \ln(2)$.

Corrigé :

1 Une primitive de 1 est x donc lses solutions générales sont de la forme $y(x) = Ke^{-x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

2 On cherche une solution particulière avec la méthode de variation de la constante, $y_p(x) := K(x)e^{-x}$, on obtient

$$K^{'}(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x}. \tag{3}$$

on a donc $K(x) := \int_0^x \frac{e^u}{1+e^u}du = \int_1^{e^x} \frac{1}{1+u}du = [\ln(1+u)]_1^{e^x} = \ln(1+e^x) - \ln(2)$, avec le changement de variable $\varphi(x)(x) = e^x$ et $\varphi^{'}(x)(x) = e^x$. Donc une solution particulière est $y_p(x) := \ln(1+e^x)e^{-x}$ et la solution générale est $y(x) = y_H(x)+y_p(x)$ où $y_H(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée à (2) qui coïncide avec (1). Donc la solution générale est $y(x) = Ke^{-x} + \ln(1+e^x)e^{-x}$.

3 D'après la question précédente $y(0) = K + \ln(2) = \ln(2)$ et donc $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(x).$$

1. Sur quels intervalles la primitive de f est-elle définie ?
2. Est ce que l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \ln(x)dx$$

converge ?

Corrigé :

1 Une primitive de f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, car f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Soit $a \in]0, 1[$.

$$\int_a^1 \ln(x)dx = [x\ln(x)]_a^1 - \int_a^1 1dx = -a\ln(a) - (1-a)$$

grâce à une IPP avec

$$\begin{cases} u'(x) & = 1, \quad v(x) & = \ln(x). \\ u(x) & = x, \quad v'(x) & = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$\int_0^1 \ln(x)dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln(x)dx = -1$$

donc l'intégrale impropre converge vers -1.