Université de Rennes 1 | MIEE L1
Année 2013-2014 | Module AN1 : Groupe 1,2,3,5,8

Contrôle continu 5
2 Décembre 2013

Exercice 1.
Calculer l'intégrales suivante :

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+1}dx.$$

Corrigé :

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+6}{x^2+6x+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^8 \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}(\log(8)-\log(1)) = \frac{3\log(2)}{2}$$

avec le changement de variable $u(x) = x^2+6x+1$, $u'(x) = 2x+6$.

Exercice 2.

1- Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle suivante

$$y^{'} - 2xy = 0. \tag{1}$$

2- Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y^{'} - 2xy = (1-2x)e^x. \tag{2}$$

3- Déduire de ce qui précède la solution de l'équation (2) telle que $y(0) = 2$.

Corrigé :

1- $y(x) = Ke^{x^2}$

2- On cherche une solution particulière avec la méthode de variation de la constante, $y_p(x) := K(x)e^{x^2}$, on obtient

$$K^{'}(x)e^{x^2} = (1-2x)e^x. \tag{3}$$

on a donc $K(x) := \int e^{-x^2+x}(1-2x)dx = e^{-x^2+x}$ et $y_p(x) := e^x$ et la solution générale est $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ où $y_H(x)$ est la solution générale de l'équation homogène associée à (2) qui coïncide avec (1). Donc la solution générale est $y(x) = Ke^{x^2} + e^x$.

3- D'après la question précédente $y(0) = K+1 = 2$ et donc $y(x) = e^{x^2} + e^x$.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

1. Sur quels intervalles on peut définir une primitive de f ?
2. Est ce que l'intégrale impropre

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

converge ?

Corrigé :

1- Une primitive de f peut être définie sur $]1, \infty[$.

2- L'intégrale impropre

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{M \to 1^+} \int_M^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{M \to 1^+} [2\sqrt{x-1}]_M^2 = \lim_{M \to 1^+} (2-2\sqrt{M-1}) = 2$$

converge.