Université de Rennes 1 — MIEE L1

Année 2013-2014 — Module AN1 : Groupe 4

Corrigé du Contrôle continu 4
18 novembre 2013

Exercice 1.

1. comme $e^x > 0$, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x}(e^x-1)}{(1+e^x)(1+e^{2x})} \end{aligned}$$

Si $x > 0$, $e^x > 1$, alors $f'(x) > 0$. Si $x < 0$, $e^x < 1$, alors $f'(x) < 0$

3. f est décroissante quand $x < 0$ et f est croissante quand $x > 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

4. l'équation de la tangente :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0),$$

qui est :

$$y = \ln(2) - \frac{\pi}{4}$$

5. Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, la courbe de f admet une asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$.

$$f(x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) - \arctan e^x = x + \ln(e^{-x}+1) - \arctan e^x,$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = -\frac{\pi}{2}.$$

La courbe de f admet donc asymptote la droite $y = x - \frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Exercice 2.

1. On fait la décomposition en éléments simples :

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{3x+4}{x^2+3x+2}dx = [\ln|x+1| + 2\ln|x+2|]_0^1 = \ln\frac{9}{2}.$$

2. On pose $f(x) = \ln(1+x^2)$ et $g(x) = x$, par l'intégration par parties,

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx.$$

Une division euclidienne donne

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = 2 - \frac{2}{1+x^2},$$

alors

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln 2 - [2x - \arctan x]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

3. On développe ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$),

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + x\right)^2 dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + x^2\right) dx \\
&= \left[\ln(x) + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^3}{3}\right]_1^4 = 2\ln(2) + \frac{91}{3}
\end{aligned}$$