Année 2013–2014

Parcours MIEE

Module AN1 — DS 4

Corrigé

Exercice 1

1. La fonction f est définie en x si et seulement si $e^x + 1 > 0$. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f, est :

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$$

2. Soit $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$, de plus on a

$$f(-x) = -x - 2\ln\left(1 + e^{-x}\right) = -x - 2\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -x - 2\ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right).$$

Or d'après les propriétés du logarithme on a :

$$f(-x) = -x - 2\ln\left(e^x + 1\right) + 2\ln(e^x) = -x - 2\ln\left(e^x + 1\right) + 2x = f(x).$$

On en conclut que $\boxed{f \text{ est paire.}}$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions de fonctions dérivables. En effet :

- $(x \mapsto x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme,
- $(x \mapsto e^x + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$,
- $(x \mapsto \ln(e^x + 1))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{f'(x) = 1 - 2\frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.}$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
& & f'(x) &\geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow & \frac{1 - e^x}{1 + e^x} &\geqslant 0 \\
&\underset{\text{car } e^x+1>0}{\Leftrightarrow} & 1 - e^x &\geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow & 1 &\geqslant e^x \\
&\underset{\text{en prenant } \ln \text{ de chaque côté qui est croissant}}{\Leftrightarrow} & 0 &\geqslant x.
\end{aligned}$$

Par conséquent on a :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

4. Le signe de la dérivée nous permet de déduire les variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$-2\ln 2$	$\searrow$	

5. L'équation de la tangente en un point x_0 de $\mathcal{D}_f$ est :

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

Donc avec $x_0 = 0$, comme $f'(x_0) = 0$ et $f(x_0) = -2\ln 2$ on a :

$$\boxed{T_0(x) = -2\ln 2.}$$

6. On cherche une asymptote oblique de f qui aurait pour équation $y = ax + b$. Regardons le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 - 2\frac{\ln(1 + e^x)}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 1,$$

car $\ln(1 + e^x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, s'il y a une asymptote d'équation $y = ax + b$ à la courbe de f en $-\infty$ alors nécessairement $a = 1$. On remarque que :

$$f(x) - x = -2\ln(1 + e^x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent nécessairement $b = 0$. On en déduite que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

Exercice 2

1. On remarque que $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4x + 3}\right)$ est continue lorsque $x^2 + 4x + 3 \neq 0$. Résolvons $x^2 + 4x + 3 = 0$, son discriminant est $\Delta = 16 - 12 = 4$. Les deux racines de $x^2 + 4x + 3$ sont donc $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{4}}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{4}}{2} = -1$. On en déduit que l'intégrande est continue sur $[0, 1]$ donc que l'intégrale est définie. De plus $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$. On effectue alors la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{x^2 + 4x + 3}$. D'après le cours on sait que :

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3}, \text{avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

On multiplie par $(x + 1)$:

$$\frac{1}{x + 3} = A + \frac{B}{x + 3}(x + 1).$$

Pour $x = -1$ on trouve $A = \dfrac{1}{2}$. De même si on multiplie par $(x + 3)$, on a :

$$\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2(x + 1)}(x + 3) + B.$$

Pour $x = -3$ on trouve $B = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi on a :

$$I_1 := \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 3}dx = \int_0^1 \frac{1}{2(x + 1)} - \frac{1}{2(x + 3)}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x + 1}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x + 3}dx.$$

Donc on en déduit :

$$I_1 = \frac{1}{2}\Big[\ln|x + 1|\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[\ln|x + 3|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Finalement, on a $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).}$

2. D'après le cours $(x \mapsto \arcsin x)$ est continue sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. On en déduit que l'intégrale est définie. On note :

$$I_2 = \int_0^{1/\sqrt{2}} \arcsin x dx.$$

On effectue une intégration par partie en posant :

$$u = \arcsin x \qquad u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v' = 1 \qquad v = x.$$

Les fonctions u, v sont $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$I_2 = \Big[x \arcsin x\Big]_0^{1/\sqrt{2}} - \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \Big[\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{1/\sqrt{2}}.$$

Or on sait que $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$. Donc :

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.}$$

3. La fonction $\big(x \mapsto \cos(x)\sin^4(x)\big)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: l'intégrale est définie. On reconnait que l'intégrande est la dérivée de la fonction composée $\left(x \mapsto \frac{1}{5}\sin^5 x\right)$ donc on a :

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} \cos(x)\sin^4(x) dx = \frac{1}{5}\Big[\sin^5(x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{5}\sin^5\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Par conséquent, on a :

$$\boxed{I_3 = \frac{\sqrt{2}}{40}.}$$