Module AN1 — DS 3 (v3)

Corrigé commenté

Exercice 1

Quand $x \to +\infty$, $\quad (x > 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-x^2}} &= \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \frac{\overbrace{x^2}^{\to +\infty}\overbrace{\left(\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}^{\to 1}+\overbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}^{\to 1}\right)}^{\to 2}}{2} \\
&\longrightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. L'exponentielle et le cosinus sont définis sur $\mathbb{R}$, donc f est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $1-x>0$, donc $\boxed{D_f =]-\infty\,;1[}$.

2. Quand $x \to -\infty$, $\quad (x < 0)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos(x)-2}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}\sqrt{1-x}} \\
&= \underbrace{\frac{\cos(x)-2}{\mathrm{e}}}_{\text{borné}}\;\underbrace{\frac{1}{\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{\to +\infty}\;\underbrace{\sqrt{-x}}_{\to +\infty}}\;\frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}_{\to 1}}}_{\to 0} \\
&\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

3. En $-\infty$. On a vu que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Ainsi, la direction donnée par $y=0$ est direction asymptotique en $-\infty$. De plus, bien entendu, $f(x) - 0 \times x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote en $-\infty$.

En 1^-. Quand $x \to 1^-$,

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 0^+}}\,\underbrace{\left|\mathrm{e}^{x-1}(\cos(x)-2)\right|}_{\to |\cos(1)-2|} \\
&\longrightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à Γ_f.

Exercice 3

1. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur de telles fonctions. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\cos(x^3+1)\left(\cos(x^3+1)\right)' \\ &= 2\cos(x^3+1)(-\sin(x^3+1))\,3x^2 \\ &= -6x^2\cos(x^3+1)\sin(x^3+1). \end{aligned}$$

2. La fonction h est définie et dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $5 + \mathrm{e}^{3x} > 0$, ce qui est toujours vrai. Ainsi, h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\left(5+\mathrm{e}^{3x}\right)'}{5+\mathrm{e}^{3x}} \\ &= \frac{3\,\mathrm{e}^{3x}}{5+\mathrm{e}^{3x}}. \end{aligned}$$

3. La fonction ℓ est définie et dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $3x - 1 > 0$. Ainsi, ℓ est définie et dérivable sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$. Pour tout $x \in \left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$,

$$\begin{aligned} \ell'(x) &= -\frac{\left(\sqrt{3x-1}\right)'}{\left(\sqrt{3x-1}\right)^2} \\ &= -\frac{\frac{(3x-1)'}{2\sqrt{3x-1}}}{3x-1} \\ &= -\frac{3}{2(3x-1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$