Université de Rennes 1 MIEE L1
Année 2013-2014 Module AN1 : Groupe 4

Corrigé du Contrôle continu 3
21 octobre 2013

Exercice 1.
Pour des valeurs de x arbitrairement grandes ($x > 0$) la fonction est bien définie. De plus, on peut écrire

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\ln(x)}{(x^2+x)-(x^2-x)} = \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\ln(x)}{2x}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\ln(x).$$

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et par ailleurs on voit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} = +\infty$.

Exercice 2.
Les fonctions exponentielle et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$. Ainsi la fonction f est bien définie lorsque $x^4-16 = (x^2-4)(x^2+4) \geq 0$. Comme $x^2+4 \geq 4$, pour tout x réel, la condition précédente revient à $x^2-4 \geq 0$. On obtient que le domaine de définition de f est

$$D_f =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\,.$$

Pour $x \in D_f$ on peut écrire

$$f(x) = e(\sin(x)-2)\cdot e^{-x}\cdot x^2\sqrt{1-\frac{16}{x^4}} = \Big(e(\sin(x)-2)\Big)\cdot\Big(x^2\,e^{-x}\Big)\cdot\sqrt{1-\frac{16}{x^4}}.$$

On remarque que le premier facteur de l'expression précédente est borné pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\Big|e(\sin(x)-2)\Big| \leq 3e$. Il est facile de voir que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\dfrac{16}{x^4}} = 1$. Enfin on sait que $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$. On trouve que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et donc la droite horizontale $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

Nous allons calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Le premier facteur $e(\sin(x)-2)$ reste borné mais négatif (dans $[-3,-1]$). De la même façon $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-\dfrac{16}{x^4}} = 1$, puisque $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$. En revanche $\lim_{x\to-\infty} x^2\,e^{-x} = +\infty$. On trouve que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et il y a donc une branche infinie en $-\infty$.

De plus

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\, e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\, e^{-x} = -\infty$$

et on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ donc il y a une direction asymptotique verticale (on dit qu'il y a une branche parabolique verticale) en $-\infty$.

Enfin il est facile de voir que la fonction est continue sur son domaine de définition et que $f(-2) = f(2) = 0$ donc il n'y a pas de droite verticale asymptote au graphe de la fonction f.

Exercice 3.
La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par des opérations avec des fonctions définies et dérivables sur $D_g = \mathbb{R}$. De plus

$$\begin{aligned} g'(x) = 2\cos(e^x+1)\cdot\Big(\cos(e^x+1)\Big)' &= 2\cos(e^x+1)\Big(-\sin(e^x+1)\Big)\cdot(e^x+1)' \\ &= -2e^x\sin(e^x+1)\cos(e^x+1)\,. \end{aligned}$$

La fonction h est définie et dérivable sur $D_h =]0,+\infty[$ (car ln est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$). De plus sur D_h,

$$h(x) = e^{\ln(x)}\, e^x = x\, e^x, \qquad \text{d'où} \qquad h'(x) = e^x + x\, e^x = (1+x)e^x\,.$$

Enfin, l est définie sur $D_l = [\frac{2}{7},+\infty[$ (pour que $7x-2 \geq 0$) mais dérivable sur $]\frac{2}{7},+\infty[$ (domaine où $7x-2>0$) et sur ce dernier intervalle

$$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7x-2}}\cdot(7x-2)' = \frac{7}{2\sqrt{7x-2}}\,.$$