UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Année 2013–2014

Parcours MIEE

Module AN1 — DS 2 (v2)

Corrigé commenté

Les mentions en italique ne font pas partie de la rédaction proposée mais sont des explications supplémentaires.

Exercice 1

1. La fonction f est définie en x si et seulement si $x(x^2+x+1) \geqslant 0$. *L'expression est déjà sous forme d'un produit, donc c'est facile : on étudie le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes pour le produit.* Le discriminant du trinôme x^2+x+1 vaut $1^2-4\times1\times1=-3<0$, donc ce trinôme n'a pas de racine réelle. Il garde donc le signe de son coefficient dominant : il est toujours positif. Ainsi, le signe de $x(x^2+x+1)$ est le signe de x. Finalement, $\boxed{D_f=\mathbb{R}_+}$.

La fonction g est définie en x si et seulement si $|x|-3>0$, *ie.* $|x|>3$. Ainsi, $\boxed{D_g=\mathbb{R}\smallsetminus[-3\,;3]}$ ou encore $D_g=\,]-\infty\,;-3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$. *On peut détailler et revenir à la définition de la valeur absolue : sur $\mathbb{R}_+$, $|x|=x$, donc on se ramène à $x>3$; sur $\mathbb{R}_-$, $|x|=-x$, donc on se ramène à $-x>3$ ie. $x<-3$.*

2. La fonction h est clairement définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction $x\mapsto x^2+1$ est paire car somme de fonctions paires. Par conséquent, $\boxed{h \text{ est paire}}$. *On peut aussi le faire à la main. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a $-x\in\mathbb{R}=D_h$ et $h(-x)=\cos((-x)^2+1)=\cos(x^2+1)=h(x)$.*

Exercice 2

1. Effectuons la division euclidienne de X^4+X+1 par X^3-2X^2+X :

$$
\begin{array}{r|l}
X^4+X+1 & X^3-2X^2+X \\ \cline{2-2}
-\left(X^4-2X^3+X^2\right) & \qquad X+2 \\ \cline{1-1}
2X^3-X^2+X+1 & \\
-\left(2X^3-4X^2+2X\right) & \\ \cline{1-1}
3X^2-X+1 &
\end{array}
$$

Donc finalement, on a :

$$\boxed{X^4+X+1=\left(X^3-2X^2+X\right)\underbrace{(X+2)}_{\text{Quotient}}+\underbrace{3X^2-X+1}_{\text{Reste}}}.$$

2. On remarque que l'on peut aisément factoriser par X donc :

$$X^3-2X^2+X=X\left(X^2-2X+1\right).$$

On reconnait une identité remarquable dans le second membre de l'égalité donc :

$$X^3-2X^2+X=X(X-1)^2.$$

Comme X et $X-1$ sont des polynômes de degré 1 ils sont irréductibles dans $\mathbb{R}$ et par conséquent :

$$\boxed{X(X-1)^2 \text{ est la factorisation en facteurs irréductibles dans } \mathbb{R}[X] \text{ de } X^3-2X^2+X.}$$

3. On reprend la méthodologie du cours.

— On a $\deg(R(X)) = \deg\left(X^4+X+1\right) - \deg\left(X(X-1)^2\right) = 4-3 = 1 > 0$. Il faut donc trouver la partie entière de $R(X)$, or d'après **2.** et **1.** on a :

$$R(X) = \frac{\left(X^3-2X^2+X\right)(X+2)+3X^2-X+1}{X^3-2X^2+X} = X+2+\frac{3X^2-X+1}{X^3-2X^2+X}.$$

On est ramené à décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{3X^2-X+1}{X^3-2X^2+X}$ qui est de degré négatif.

— On connait déjà, par la question **2.** , l'écriture du dénominateur de $R(X)$ comme produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, on peut passer à l'étape suivante.

— D'après **2.** et le cours on sait que la forme théorique de la décomposition en éléments simples est :

$$\frac{3X^2-X+1}{X^3-2X^2+X} = \frac{3X^2-X+1}{X(X-1)^2} = \frac{A}{X}+\frac{B_1}{X-1}+\frac{B_2}{(X-1)^2}, \tag{1}$$

avec $A, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$ des constantes à déterminer.

— On cherche maintenant les constantes. Cherchons d'abord A, on multiplie (1) par X et on obtient :

$$\frac{3X^2-X+1}{(X-1)^2} = A + B_1\frac{X}{X-1}+B_2\frac{X}{(X-1)^2}.$$

Cette égalité évaluée en $X=0$ livre $A=1$. Cherchons alors B_2, on multiplie (1) par $(X-1)^2$ et on a :

$$\frac{3X^2-X+1}{X} = \frac{(X-1)^2}{X}+B_1(X-1)+B_2.$$

Cette égalité évaluée en $X=1$ livre $B_2=3$. Cherchons alors B_1, on multiplie (1) par $X-1$ et on obtient :

$$\frac{3X^2-X+1}{X(X-1)} = \frac{X-1}{X}+B_1+\frac{3}{X-1}. \tag{2}$$

On regarde alors les limites de chaque terme lorsque $X \longrightarrow +\infty$:

$$\frac{3X^2-X+1}{X(X-1)} = \frac{X^2\left(3-\frac{1}{X}+\frac{1}{X^2}\right)}{X^2\left(1-\frac{1}{X}\right)} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 3, \quad \frac{X-1}{X} = 1-\frac{1}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 1, \quad \frac{3}{X-1} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0.$$

L'égalité (2) donne donc :

$$3 = 1 + B_1,$$

et donc $B_1 = 2$.

Par conséquent, la décomposition en éléments simples de $R(X)$ est

$$\boxed{X+2+\frac{1}{X}+\frac{2}{X-1}+\frac{3}{(X-1)^2}.}$$