Université de Rennes 1 — MIEE L1

Année 2013-2014 — Module AN1 : Groupe 4

Corrigé du contrôle continu 1
23 septembre 2013, 16h15

Exercice 1.
Notons $z_1 := 1 + i$, $z_2 := \sqrt{3} + i$ et $z := z_1/z_2$. On voit que $z_2\overline{z_2} = 4$ et donc

$$z = \frac{1}{4}(1+i)(\sqrt{3}-i) = \frac{1}{4}\Big((\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)\Big).$$

Par ailleurs $|z_1| = \sqrt{2}$, $\cos\theta_1 = \mathrm{Re(z_1)/|z_1|} = 1/\sqrt{2}$ et $\sin\theta_1 = \mathrm{Im(z_1)/|z_1|} = 1/\sqrt{2}$. On déduit qu'un argument de z_1 est $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. De même $|z_2| = 2$, $\cos\theta_2 = \mathrm{Re(z_2)/|z_2|} = \sqrt{3}/2$ et $\sin\theta_2 = \mathrm{Im(z_2)/|z_2|} = 1/2$. On déduit qu'un argument de z_2 est $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

En utilisant la forme exponentielle des nombres complexes, on trouve

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

En identifiant avec le résultat du premier point on trouve $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 2.
On écrit $1-i$ en forme exponentielle $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Alors l'équation $Z^2 = 2^{1/2}e^{-i\pi/4}$ admet les solutions $Z_1 = 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$ et $Z_2 = -2^{1/4}e^{-i\pi/8} = 2^{1/4}e^{i\,7\pi/8}$ Une autre méthode est de calculer les racines carrées Z_1 et Z_2 de $1-i$ en utilisant la forme algébrique. On pose $Z = a+ib$. Alors $a^2+b^2 = |Z|^2 = |1-i| = \sqrt{2}$, $a^2-b^2 = 1$ et $2ab = -1$. On en déduit que $2a^2 = \sqrt{2}+1$ et $2b^2 = \sqrt{2}-1$, d'où

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad Z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Pour ce qu'il y a de la deuxième équation nous avons encore deux méthodes. D'abord d'après le cours les solutions de $z^4 = 1-i$ sont $z_k = (2^{1/2})^{1/4}\exp\left(i\frac{-\pi/4+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0,1,2,3$. Ainsi

$$z_0 = 2^{1/8}e^{-i\pi/16},\ z_1 = 2^{1/8}e^{i\,7\pi/16},$$
$$z_2 = 2^{1/8}e^{i\,15\pi/16} = -2^{1/8}e^{-i\pi/16},\ z_3 = 2^{1/8}e^{i\,23\pi/16} = -2^{1/8}e^{i\,7\pi/16}.$$

Une autre méthode est d'utiliser l'équation du premier point et de résoudre deux équations $z^2 = 2^{1/4}e^{-i\pi/8}$ avec les solutions $z_0 = 2^{1/8}e^{-i\pi/16}$, $z_2 = 2^{1/8}e^{i\,15\pi/16}$ et $z^2 = 2^{1/4}e^{i\,7\pi/8}$ avec les solutions $z_1 = 2^{1/8}e^{i\,7\pi/16}$, $z_3 = 2^{1/8}e^{i\,23\pi/16}$.

Exercice 3.
On rappelle que

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

On peut écrire

$$(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^4 = (e^{i\,2\theta}-2+e^{-i\,2\theta})^2 = e^{i\,4\theta}+e^{-i\,4\theta}+4-4e^{i\,2\theta}-4e^{-i\,2\theta}+2 = 2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6.$$

ce qui signifie que $16\sin^4\theta = 2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6$ car $i^4 = 1$.