Université de Rennes 1 MIEE L1
Année 2013-2014 Module AN1-Groupes : 1, 2, 3, 5, 8

**Corrigé du contrôle continu 1**
**23 septembre 2013, 10h15**

**Exercice 1.**
Calculer le module et l'argument du nombre complexe $2i(i-1)+\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^3+(1+i)\overline{(1+i)}$.

$z := 2i(i-1)+\left(\overline{\sqrt{3}+i}\right)^3+(1+i)\overline{(1+i)} = -2-2i+\left(\sqrt{3}-i\right)^3+(1+i)(1-i)=$
$-2-2i+\sqrt{3}^3-3\sqrt{3}^2 i-3\sqrt{3}+i+2= \sqrt{3}^3-3\sqrt{3}+i(-2-9+1) = \sqrt{3}^3-3\sqrt{3}-10i = -10i.$

$$|z| = 10 \text{ et } Arg(z) = -\frac{\pi}{2}$$

**Exercice 2.**
1. Exprimer sous forme exponentielle les racines carrées de $1-i$.

$$\zeta = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \rho e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} \text{ et } z_2 = \sqrt[4]{2}e^{-i(\frac{\pi}{8}+\pi)}$$

2. Exprimer sous forme algébrique les racines carrées de $1-i$.
$z = x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$) on veut que $z^2=\zeta$.
On obtient :

$$x^2+y^2 = |\zeta| = \sqrt{2}$$
$$x^2-y^2 = 1$$
$$2xy = -1$$

D'où

$$x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

et enfin en utilisant le fait que $x$ et $y$ ont signe opposé :

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(4-2i)z-i=0$. On calcule le discriminant

$$\Delta := b^2-4ac = (4-2i)^2-4(-i) = 16+(2i)^2-16i+4i = 12-12i = 12(1-i)$$

On cherche les nombres complexes $\delta_{1,2}$ tels que $\delta_{1,2}^2 = \Delta = 12(1-i)$.
Grâce à la question précédente, $\delta_{1,2} = \sqrt{12}z_{1,2}$, donc :

$$\delta_1 = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) = \sqrt{6}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\delta_2 = 2\sqrt{3}(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}) = \sqrt{6}(-\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1})$$

Les racines de l'équation sont :

$$z_{1,2} = \frac{-(4-2i) \pm \sqrt{6}(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})}{2} = -(2-i) \pm (\sqrt{3}(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}))$$

$$z_{1,2} = -2 \pm (\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sqrt{2}+1} + i(1 \mp \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\sqrt{2}-1}))$$

**Exercice 3.**
Linéariser l'expression suivante $8\cos^4\theta$.

On rappelle que $\cos(\theta) = (\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})$ et donc $8\cos^4\theta = 8(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2})^4 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4}{2}$.
Avec la formule du binôme :

$$(e^{i\theta} + e^{i\theta})^4 = e^{i4\theta} + 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{-2i\theta}e^{+2i\theta} + 4e^{-i3\theta}e^{i\theta} + e^{-i4\theta}.$$

On aura donc :

$$8\cos^4\theta = \frac{1}{2}(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} + 4(e^{i2\theta} + e^{i2\theta}) + 6) = \cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3.$$