Année 2013–2014

Parcours MIEE

Module AN1 — DS 1 (v1)

Corrigé commenté

La rédaction proposée est assez détaillée, vous pouvez adopter un style plus condensé. Les mentions en italique ne font pas partie de la rédaction proposée mais sont des explications supplémentaires.

Exercice 1

1. *Nous allons exprimer le complexe cherché sous forme exponentielle en exploitant les propriétés multiplicatives de cette écriture.*

Soit Z le complexe étudié. On a $Z = \frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4}$ avec $z_1 = 2+2\mathrm{i}$, $z_2 = 1-\mathrm{i}$, $z_3 = \overline{z_2} = 1+\mathrm{i}$ et $z_4 = 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$. On a

$$\begin{aligned}
|z_1| &= |2+2\,\mathrm{i}| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\\
|z_2| &= |1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},\\
|z_3| &= |\overline{z_2}| = |z_2| = \sqrt{2} \quad \text{et}\\
|z_4| &= \left|1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2.
\end{aligned}$$

En factorisant le module, on obtient

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \textit{en reconnaissant l'angle dans la table des fonctions trigo,}\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \textit{en reconnaissant l'angle,}\\
z_3 &= \overline{z_2}\\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad \text{et}\\
z_4 &= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\\
&= 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \quad \textit{en reconnaissant l'angle.}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_4}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)}\\
&= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\sqrt{2} > 0$, le module de Z est $\boxed{\sqrt{2}}$ et un argument de Z est $\boxed{\frac{5\pi}{12}}$.

2. *Si $\frac{5\pi}{12}$ était un angle dont on connait le cosinus et le sinus, nous aurions pu exploiter la question précédente pour trouver la forme algébrique. Mais ce n'est pas le cas, nous allons donc devoir faire le calcul à la main.*

On a

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{2+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \frac{1+\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}} \\
&= \frac{2+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}-\mathrm{i}+\sqrt{3}} && \textit{on développe en parallèle numérateur et dénominateur} \\
&= \frac{4\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{i}} \\
&= \frac{4\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)\mathrm{i}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2} && \textit{on utilise le conjugué du dénominateur} \\
&= \frac{4\mathrm{i}+4\sqrt{3}\mathrm{i}-4+4\sqrt{3}}{1+3+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}} \\
&= \frac{4\left(\sqrt{3}-1\right)+4\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)}{8} \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\mathrm{i}},
\end{aligned}$$

ce qui est la forme algébrique de Z car $\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. L'équation étudiée est du second degré. Soit Δ son discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-(2+\mathrm{i}))^2 - 4(1+\mathrm{i}) \\
&= 4-1+4\mathrm{i}-4-4\mathrm{i} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Soit $\delta = \mathrm{i}$: on constate que δ est une racine carrée de Δ, donc, par théorème, les solutions de l'équation étudiée sont

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{2+\mathrm{i}+\mathrm{i}}{2} \\
&= \boxed{1+\mathrm{i}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{2+\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2} \\
&= \boxed{1}.
\end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z^4 = \left(z^2\right)^2$, donc z est solution de l'équation étudiée ici si et seulement si z^2 est solution de l'équation de la question précédente.

Résolvons $z^2 = Z_1 = 1+\mathrm{i}$. *On peut le faire simplement en voyant que* $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ *et en utilisant la méthode générale d'extraction de racine* n^{e}*. Ici, nous choisissons plutôt la méthode algébrique spécifique aux racines carrées.* Soit z une solution de la forme $x+y\,\mathrm{i}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Par identification des parties réelles et imaginaires, on a

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{1}$$
$$2xy = 1. \tag{2}$$

De plus, par l'égalité des modules $\left|z^2\right| = |Z_1|$, on a

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2}. \tag{3}$$

Par $(1)+(3)$, on obtient $2x^2 = 1+\sqrt{2}$, d'où $x = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$. Par $(1)-(3)$, on obtient $-2y^2 = 1-\sqrt{2}$, d'où $y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$. Or (2) indique que x et y ont même signe, donc $z = \pm\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\mathrm{i}\right)$.
Mais par théorème, l'équation $z^2 = 1+\mathrm{i}$ admet 2 solutions, donc les deux solutions sont

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\mathrm{i}.$$

D'autre part, résolvons l'équation $z^2 = Z_2 = 1$. Il est bien connu que les solutions sont 1 et -1.

Finalement, les solutions de l'équation étudiée sont

$$\boxed{1, \qquad -1, \qquad \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\,\mathrm{i}}.$$

Exercice 3
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
4\sin^3(\theta) &= 4\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 && \textit{par la formule d'Euler}\\
&= -\frac{4}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3 && \textit{car } \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^3 + 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) + 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^2 + \left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)^3\right) && \textit{coefficients du Triangle de Pascal ; attention aux signes moins !}\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}\right) && \textit{par la formule de Moivre et simplifications}\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta} - 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin(3\theta) - 3\times 2\mathrm{i}\sin(\theta)\right) && \textit{par formule d'Euler}\\
&= \boxed{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}.
\end{aligned}$$