Relèvement de la divergence

Michel Crouzeix

Abstract

Développement issu d'une partie d'un article de Ricardo Durán et de Maria Amelia Muschietti. Les résultats présentés ici se trouvaient déjà pour l'essentiel dans une note de M.E. Bogovskiĭ.

Soit $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction C^∞ à support compact telle que $\int w(x)\,dx = 1$, la dimension d sera supposée ≥ 2. On lui associe

- la fonction $G_\omega(x,y)$ définie pour $x \neq y \in \mathbb{R}^d$ par

$$G_\omega(x,y) = \int_1^\infty s^{d-1}\omega(y+s(x-y))\,ds\ (x-y),$$

- l'opérateur R_ω défini par

$$(R_\omega f)(x) = \int G_\omega(x,y)\,f(y)\,dy.$$

Nota. Lorsque le domaine d'intégration n'est pas précisé, il est supposé être l'espace $\mathbb{R}^d$ entier.

Lemme 1. *Soit f une fonction à support compact, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $R_\omega f$ est bien défini, $R_\omega f$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ et le support de $R_\omega f$ est contenu dans l'enveloppe étoilée*[1] *du support de f par rapport au support de ω. De plus on a*

$$\operatorname{div} R_\omega f = f - \int f(y)\,dy\ \omega.$$

En particulier $\operatorname{div} R_\omega f = f$ si $f \in L^1_0(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^d)\,;\int f(y)\,dy = 0\}$.

Démonstration. Soit R tel que la boule de centre 0 et de rayon R contienne le support de ω et le support de f, soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction vérifiant $\eta(x) = 1$ dans la boule de centre 0 et de rayon 1. On pose $\eta_R(x) = \eta(x/R)$.

a) On remarque que $\omega(y+s(x-y)) \neq 0$ avec $s > 1$ entraîne : $x = \frac{1}{s}(y+s(x-y)) + (1-\frac{1}{s})y$ est combinaison convexe de y avec un point du support de ω. Il en résulte que, si x n'appartient à aucun segment joignant un point du support de ω avec un point du support de f, $(R_\omega f)(x)$ est bien défini et vaut 0. Cela montre la propriété sur les supports.

b) On introduit les fonctions

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \eta_R(x)\,\eta_R(y) \int_0^1 s^{d-1}\omega(y+s(x-y))\,ds\ (x-y),\\ K(y,z) &= \eta_R(y) \int_0^\infty s^{d-1}\omega(y+sz))\,ds\ z. \end{aligned}$$

[1] On appelle enveloppe étoilée de E par rapport à F, le plus petit ensemble qui contient E et qui est étoilé par rapport à F

On vérifie facilement que, pour $|x| \leq R$ et $|y| \leq R$, on a

$$G_\omega(x,y) = K(y, x-y) - H(x,y).$$

De plus (S_{d-1} désignant la sphère unité de $\mathbb{R}^d$)

$$H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \qquad K \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times S_{d-1}; \mathbb{R}^d),$$
$$K(y, \lambda z) = \lambda^{-(d-1)} K(y,z), \qquad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

On en déduit que

$$C(R,\omega) = \sup_{|x|,|y| \leq R} |x-y|^{d-1}\, |G_\omega(x,y)| < +\infty,$$

d'où en posant $h_R(z) = C(R,\omega)\, \eta_{2R}(z)\, |z|^{-(d-1)}$,

$$|G_\omega(x,y)\, f(y)| \leq h_R(x-y)|f(y)|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

On a $h_R \in L^1(\mathbb{R}^d)$, il en résulte que $R_\omega f$ est bien défini et appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. Remarquons que de plus, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq +\infty$ (resp. $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$), alors $R_\omega f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (resp. $R_\omega f \in C^0(\mathbb{R}^d)$) et

$$\|R_\omega f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|h_R\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

c) Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On part de

$$\begin{aligned}
\varphi(y) - \int \varphi(z)\, \omega(z)\, dz &= \int (\varphi(y) - \varphi(z))\, \omega(z)\, dz \\
&= -\int \int_0^1 \nabla\varphi(y + t(z-y))\, (z-y)\, \omega(z)\ dt\, dz.
\end{aligned}$$

Avec le changement de variables $x = y + t(z-y)$, $s = 1/t$, on obtient $z = y + s(x-y)$ et

$$\begin{aligned}
\varphi(y) - \int \varphi(x)\, \omega(x)\, dx &= -\int \int_1^\infty \nabla\varphi(x)\, (x-y)\, s^{d-1}\, \omega(y + s(x-y))\ dt\, dx \\
&= -\int G_\omega(x,y)\, \nabla\varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int (R_\omega f)(x) \nabla\varphi(x)\, dx &= \int\int G_\omega(x,y)\, \nabla\varphi(x)\, f(y)\ dy\, dx \\
&= -\int \varphi(y)\, f(y)\, dy + \int \varphi(x)\, \omega(x)\, dx \ \int f(y)\, dy,
\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\operatorname{div}(R_\omega f) = f - \omega \int f(y)\, dy.$$

$\square$

On a vu au cours de la démonstration que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq +\infty$ (resp. $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$), alors $R_\omega f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (resp. $R_\omega f \in C^0(\mathbb{R}^d)$). De plus l'application $f \mapsto R_\omega f$ est uniformément continue de l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (resp. $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$) nulles en dehors de la boule $B(0,R)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ (resp. $C^0(\mathbb{R}^d)$). On a en fait plus de régularité

Lemme 2. *Pour tout $1 < p < +\infty$ et tout $R > 0$, l'application $f \mapsto R_\omega f$ est continue de l'espace des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ nulles en dehors de la boule $B(0,R)$ dans $(W^{1,p}(\mathbb{R}^d))^d$. Plus généralement, pour tout entier $m \geq 0$, cette application est continue de l'espace des fonctions $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ nulles en dehors de la boule $B(0,R)$ dans $(W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d))^d$.*

Démonstration. On a vu que

$$(R_\omega f)(x) = \int K(y, x-y)\, f(y)\, dy - \int H(x,y)\, f(y)\, dy =: (R_{_K} f)(x) - (R_{_H} f)(x).$$

Comme on a $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ on en déduit que l'application $f \mapsto R_{_H} f$ est continue de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $W^{m+1,p}(\mathbb{R}^d)$ pour tout m et tout p. Il suffit donc de montrer la continuité de l'application $f \mapsto R_{_K} f$. Rappelons que l'on a

$$K \in \mathcal{D}(R^d \times S_{d-1}; \mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad K(y, \lambda z) = \lambda^{-(d-1)} K(y,z), \qquad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

On définit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times d})$ et $G \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus 0), \mathbb{R}^{d\times d})$ par

$$\begin{aligned} \theta_{kl}(y) &= \eta(y) \int_{S_{d-1}} \int_0^\infty s^{d-1} \omega(y+s\sigma)\, \sigma_k \sigma_l\, ds\, d\sigma = \int_{S_{d-1}} K_k(y,\sigma)\, \sigma_l\, d\sigma, \\ G_{kl}(y,z) &= \frac{\partial}{\partial z_l} K_k(y,z), \end{aligned}$$

($K_k(.,.)$ désignant la $k-$ième composante de $K(.,.)$). Remarquons que (en restreignant la seconde variable à la sphère unité) $G \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times S_{d-1}, \mathbb{R}^{d\times d})$. On définit aussi l'opérateur S par

$$(Sf)_{kl}(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} G_{kl}(y, x-y)\, f(y)\, dy.$$

Nous verrons dans le lemme ci-après que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, Sf est bien défini à valeurs dans $(L^p(\mathbb{R}^d))^{d\times d}$ (la limite ci-dessus étant comprise au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$). Considérons alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} \langle (R_K f)_k, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_l} \rangle \quad &+ \quad \langle (Sf)_{kl}, \varphi \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \int_{|y-x|>\varepsilon} \big(K_k(y, x-y)\, f(y)\, \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_l} + \tfrac{\partial}{\partial x_l} K_k(y, x-y)\, f(y)\, \varphi(x) \big)\, dy\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_l} \big(K_k(y, x-y)\, \varphi(x) \big)\, dx\, f(y)\, dy \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int \Big(\int_{\sigma \in S_{d-1}} K_k(y, \varepsilon\sigma)\, \varphi(y+\varepsilon\sigma)\, \sigma_l\, d(y+\varepsilon\sigma) \Big)\, f(y)\, dy \\ &= -\int \theta_{kl}(y)\, \varphi(y)\, f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \big(R_K f \big)_k = \theta_{kl}\, f + \big(Sf \big)_{kl}.$$

On déduit le résultat du lemme suivant □

Lemme 3. *Pour tout $1 < p < +\infty$ et tous $1 \leq k, l \leq d$, l'application linéaire $f \mapsto \big(Sf\big)_{kl}$ est continue de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$; plus généralement, pour tout entier $m \geq 0$, elle est continue de $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. Rappelons que l'on a $G_{kl} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times S_{d-1}, \mathbb{R})$ (en restreignant la seconde variable à la sphère unité) ; par ailleurs on vérifie facilement la propriété d'homogénéité $G_{kl}(y,z) = \lambda^d G_{kl}(y, \lambda z)$, pour tout $\lambda > 0$. De plus on a

$$\int_{S_{d-1}} G_{kl}(y,\sigma)\, d\sigma = 0.$$

En effet, par exemple si $l = n$, pour $\sigma' \in S_{d-2}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_n} K_k(.,(\sigma', \tfrac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}})) = G_{kn}(.,(\sigma', \tfrac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}}))\, \frac{1}{(1-x_n^2)^{3/2}},$$

donc, puisque $K_k(.,(\sigma',t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$,

$$\int_{-1}^{1} G_{kn}(.,(\sigma', \tfrac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}}))\, \frac{1}{(1-x_n^2)^{3/2}}\, dx_n = 0.$$

Par suite, en utilisant l'homogénéité de G_{kn},

$$\begin{aligned} \int_{S_{d-1}} G_{kn}(.,\sigma)\, d\sigma &= \int_{-1}^{1}\int_{S_{d-2}} G_{kn}(.,(\sqrt{1-x_n^2}\sigma', x_n))\, d(\sqrt{1-x_n^2}\sigma')\, \frac{dx_n}{\sqrt{1-x_{n^2}}} \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{S_{d-2}} G_{kn}(.,(\sigma', \tfrac{x_n}{\sqrt{1-x_n^2}}))\, d\sigma')\, \frac{1}{(1-x_n^2)^{3/2}}\, dx_n = 0. \end{aligned}$$

Le noyau G_{kl} vérifie donc toutes les hypothèses pour que S soit un opérateur du type Calderón-Zygmund ([2], théorème 2), ce qui montre le lemme. $\square$

Théorème 4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe qui est réunion finie d'ouverts de frontières lipschitziennes. Alors il existe un opérateur R linéaire continu de $L^1(\Omega)$ dans $(L^1(\Omega))^d$ tel que*

$$\begin{array}{rc} \forall f \in L^1_0(\Omega), & \operatorname{div}(Rf) = f, \\ \forall\ 1 < p < +\infty, & R \textit{ opère continûment de } L^p_0(\Omega) \textit{ dans } \left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)^d, \\ \textit{et de plus,} & \textit{si } f \in \mathcal{D}(\Omega), \textit{ alors } Rf \in \left(\mathcal{D}(\Omega)\right)^d. \end{array}$$

Démonstration. a) Cela découle des lemmes précédents lorsque Ω est étoilée par rapport à une boule fermée $B \subset \Omega$ (de rayon non nul). On prend alors une fonction de classe C^∞, ω, ayant pour support B et telle que $\int \omega\, dy = 1$, et on choisit $R = R_\omega$. Soit $f \in L^1_0(\Omega)$ (fonction prolongée par 0 hors de Ω). On a $R_\omega f \in \left(W^{1,p}(\mathbb{R}^d)\right)^d$ et le support de f est contenu dans l'enveloppe étoilée du support de f par rapport à la boule, donc dans $\overline{\Omega}$. Il en résulte que $Rf \in \left(W^{1,p}_0(\Omega)\right)^d$ dès que $f \in L^p_0(\Omega)$ et $Rf \in \mathcal{D}(\Omega)$ lorsque $f \in \mathcal{D}(\Omega)$.

b) Dans le cas général, Ω est union finie d'ouverts lipschitziens, donc il s'écrit aussi comme une union finie d'ouverts Ω_j chacun étoilé par rapport à une boule B_j : $\Omega = \cup_{j=1}^n \Omega_j$. On se ramène alors au a) en utilisant le résultat suivant :

il existe des applications P_j de $L^1_0(\Omega)$ dans $L^1_0(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \ldots, n$ telles que

- $f = P_1 f + \cdots + P_n f$, support de $P_j f \subset \Omega_j$,
- $\forall\ 1 < p < +\infty$, P_j est continue de $L^p_0(\Omega)$ dans $L^p_0(\Omega_j)$,
- si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $P_j f \in \mathcal{D}(\Omega_j)$.

Il suffit alors de prendre $Rf = \sum_{j=1}^{n} R_{\omega_j} P_j f$. Notons que le résultat est évident si $n = 1$. Sinon on peut au besoin réordonner les ouverts de sorte que $\Omega' = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{n-1}$ soit connexe. On suppose alors le résultat vrai pour Ω'. On a $\Omega = \Omega' \cup \Omega_n$. De plus, Ω étant connexe, on en déduit $\Omega' \cap \Omega_n \neq \emptyset$. Il existe d'une part une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int \theta \, dy = 1$ et $\operatorname{support} \theta \subset \Omega' \cap \Omega_n$. D'autre part on peut trouver une fonction $\psi \in C^\infty(\Omega)$ vérifiant $\psi(x) = 1$ dans $\Omega \setminus \Omega_n$, $\psi(x) = 1$ dans $\Omega \setminus \Omega'$, $0 \le \psi(x) \le 1$ dans Ω. On définit alors

$$
\begin{aligned}
(P'f)(x) &= \begin{cases} f(x)\psi(x) - \int_{\Omega'} f(y)\psi(y)\, dy \, \theta(x), & \text{si } x \in \Omega', \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \\
(P_n)f(x) &= \begin{cases} (f - P'f)(x), & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Il est clair que $P'f \in L^1_0(\Omega')$ et a son support dans Ω' ; de même $P_n f \in L^1_0(\Omega_n)$ et a son support dans Ω_n. L'hypothèse de récurrence permet d'écrire $P'f = \sum_{j=1}^{n} P'_j(P'f)$. Le résultat s'obtient ainsi en posant $P_j = P'_j P'$, pour $j = 1, \ldots, n-1$. □

Corollaire 5. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe, réunion finie d'ouverts de frontières lipschitziennes. On note $\mathcal{V} := \{v \in (\mathcal{D}(\Omega))^d \,;\, \operatorname{div} v = 0\}$. Alors les conditions*

$T \in \left(W^{-1,q}(\Omega)\right)^d$, $\langle T, v \rangle = 0$, pour tout $v \in \mathcal{V}$ et $1 < q < \infty$,

entraînent : il existe $p \in L^q(\Omega)$ tel que $\operatorname{grad} p = T$.

Démonstration. Soit $g \in L^{q'}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. On considère l'application

$$g \mapsto \ell(g) := -\langle T, Rg \rangle.$$

D'après le théorème précédent cette application est linéaire continue de $L^{q'}_0(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$. Il existe donc $p \in L^q_0(\Omega)$ tel que $\ell(g) = \int p \, g \, dx$.

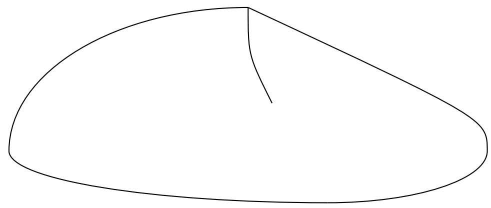
Soit maintenant $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega))^d$. On a $\psi - R(\operatorname{div} \psi) \in \mathcal{V}$, donc

$$\langle T, \psi \rangle = \langle T, R(\operatorname{div} \psi \rangle = -\ell(\psi) = -\int_\Omega p \operatorname{div} \psi \, dx,$$

c'est à dire $T = \operatorname{grad} p$.

□

Remarque. Le théorème ainsi que le corollaire sont en particulier vrais lorsque l'ouvert (connexe borné) Ω est lipschitzien, mais le fait de considérer aussi les unions finies permet par exemple d'obtenir l'ouvert ci-contre qui présente une fissure. Cela permet aussi de prendre en compte tous les polyèdres (connexes et bornés) alors qu'ils ne sont pas nécessairement lipschitziens si $n \ge 3$.



Lorsque l'ouvert Ω est lipschitzien, on a le résultat plus complet

Théorème 6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe de frontière lipschitzienne. Alors il existe un opérateur R linéaire continu de $L^1(\Omega)$ dans $(L^1(\Omega))^d$ tel que*

$$\begin{array}{ccc} \forall f \in L^1_0(\Omega), & & \operatorname{div}(Rf) = f, \\ \forall\, 1 < p < +\infty, \quad \forall m \geq 0, & & R \text{ opère continûment de } W_0^{m,p}(\Omega) \text{ dans } \big(W_0^{m+1,p}(\Omega)\big)^d, \\ \text{et de plus,} & & \text{si } f \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ alors } Rf \in \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^d. \end{array}$$

Démonstration. La démonstration donnée précédemment marche pour $n = 1$ pour tout m, mais n'est plus valable pour $n > 1$ car, tel qu'on l'a défini, P' n'est pas nécessairement continu de $W_0^{m,p}(\Omega) \cap L^1_0(\Omega)$ dans $W_0^{m,p}(\Omega)$ si $m \geq 1$. On modifie la preuve de la façon suivante. Tout d'abord on choisit les Ω_j de la forme $\Omega_j = \mathcal{O}_j \cap \Omega$ où les ouverts $\mathcal{O}_j$ forment un recouvrement fini de $\overline{\Omega}$ (chaque Ω_j étant étoilé par rapport à une boule). Il est alors possible d'avoir $\psi' \in C^\infty(\overline{\Omega}$, ce qui implique la continuité de l'opérateur P' de $W_0^{m,p}(\Omega) \cap L^1_0(\Omega)$ dans $W_0^{m,p}(\Omega)$ pour tout m. $\square$

On obtient donc de même le corollaire

Corollaire 7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné connexe de frontière lipschitzienne. Alors les conditions*
$T \in \big(W^{-m-1,q}(\Omega)\big)^d$, *$\langle T, v\rangle = 0$, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $m \geq 0$ et $1 < q < \infty$,*
entraînent : il existe $p \in W^{-m,q}(\Omega)$ tel que $\operatorname{grad} p = T$.

Pour terminer nous donnons une démonstration du théorème de de Rham (ce théorème ne requiert aucune hypothèse de régularité de la frontière)

Théorème 8. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et soit $T \in \big(\mathcal{D}'(\Omega)\big)^d$ une distribution telle que $\langle T, v\rangle = 0$, pour tout $v \in \mathcal{V}$. Alors il existe une distribution $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que* $T = \operatorname{grad} S$.

Démonstration. Supposons pour simplifier, tout d'abord, que Ω est connexe. On note alors$\mathcal{D}_0(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,;\, \int \varphi\, dx = 0\}$.

a) Soit $K \subset \Omega$ un compact d'intérieur non vide. Il existe un ensemble fini de boules ouvertes B_j tel que $K \subset \Omega' := \cup_{j=1}^n B_j$ et $\overline{\Omega'} \subset K$. D'après le théorème 6 il existe un opérateur linéaire R' défini sur $\mathcal{D}_0(\Omega')$ à valeurs dans $\big(\mathcal{D}(\Omega')\big)^d$, donc dans $\big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^d$ tel que $\operatorname{div}(R\varphi) = \varphi$. De plus R opère continûment de $W_0^{m,p}(\Omega')$ dans $\big(W_0^{m+1,p}(\Omega)\big)^d$ pour tout $p < +\infty$. On en déduit, en utilisant les injections de Sobolev, que R opère continûment de $\mathcal{D}_0(\Omega')$ muni de la norme C^m vers $\big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^d$, muni de la norme C^m, quel que soit l'entier m.

b) On se donne $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction fixée telle que $\int \theta(x)\, dx = 1$. Étant donné maintenant une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on lui associe $\psi \in \mathcal{D}_0(\Omega)$ définie par $\psi(x) = \varphi(x) - \theta(x) \int \varphi(y)\, dy$. On pose $s(\varphi) = -\langle T, R\psi\rangle$, où R est défini comme au a) à partir d'un compact $K \subset \Omega$ contenant le support de ψ. Notons que s ainsi défini est indépendant du choix de K puisque pour tout autre choix R' on a $R\psi - R'\psi \in \mathcal{V}$, d'où $\langle T, R\psi\rangle = \langle T, R'\psi\rangle$. Le a) montre la continuité dela forme linéaire s pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$, elle correspond donc à une distribution S, i.e. $s(\varphi) = \langle S, \varphi\rangle$.

Soit maintenant $\xi \in \big(\mathcal{D}(\Omega)\big)^d$, on a $\xi - R(\operatorname{div}\xi) \in \mathcal{V}$, donc

$$\langle T, \xi\rangle = \langle T, R(\operatorname{div}\xi)\rangle = -s(\operatorname{div}\xi) = -\langle S, \operatorname{div}\xi\rangle\rangle.$$

Cela montre que $T = \operatorname{grad} S$.

c) Lorsque Ω n'est pas connexe, il suffit de reprendre le même raisonnement sur chaque composante connexe.

$\square$

References

[1] M.E. Bogovskiĭ, Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium, Soviet. Math. Dokl., **20**, no 5, 1094–1098, 1979.

[2] A.P. Calderón, A. Zygmund, On singular integral, Amer. J. Math. **78**, 289–309, 1956.

[3] R.G. Durán, M.A. Muschietti, An explicit right inverse of the divergence operator which is continuous in weighted norms, Studia Math., **148**, no 3,207–219, 2001.