

Majoration de $\mathcal{Q}(3)$ par dix

Michel CROUZEIX

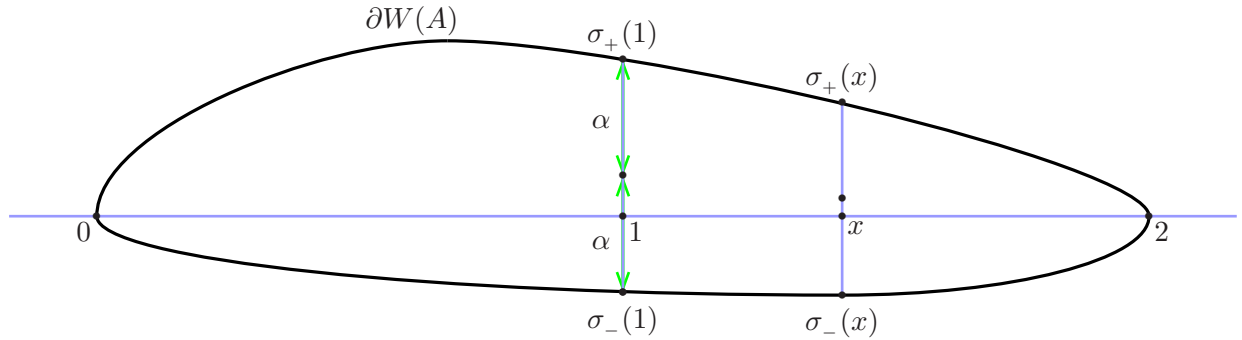
L'estimation obtenue dans cette note n'est pas fantastique, $\mathcal{Q}(3) < 10$, les essais numériques semblent en effet confirmer que la vraie valeur est $\mathcal{Q}(3) = 2$, mais c'est pour le moment la meilleure borne que j'ai réussi à obtenir.

On utilise les notations de mon manuscrit [1]. Il suffit de montrer que, si A est une matrice 3×3 , alors $\psi(A) < 10$, où $\psi(A)$ est défini par

$$\psi(A) := \sup\{\|p(A)\|; p \text{ polynôme vérifiant } |p(z)| \leq 1, \forall z \in W(A)\}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'on a

$$\text{diam}(W(A)) = 2, \quad 0 \text{ et } 2 \in \partial W(A).$$



On note $\sigma_+(x)$ et $\sigma_-(x)$ les points de la frontière $\partial W(A)$ tels que $\text{Re } \sigma_+(x) = \text{Re } \sigma_-(x) = x$ et $\text{Im } \sigma_+(x) \geq 0 \geq \text{Im } \sigma_-(x)$. On note $\alpha = \frac{1}{2}(\text{Im } \sigma_+(1) - \text{Im } \sigma_-(1))$, la demi-épaisseur de $W(A)$ au niveau du point 1. On distingue deux cas

Premier cas : $\alpha \geq 0,24$. On utilise alors le lemme 12 dans [1], qui montre que l'appatissement τ de l'image numérique $W(A)$ vérifie

$$\tau \leq \frac{\sqrt{1 + 9\alpha^2} \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{\alpha}.$$

On applique ensuite le théorème 8 qui donne

$$\psi(A) \leq C(W(A)) \leq 4G(\gamma) + 2G(\pi - 2\gamma),$$

où

$$\gamma := \arccos \frac{1}{\tau\Omega}, \quad g(t) := \left(\frac{1}{2} + \frac{|\arctan t|}{\pi}\right) \sqrt{1+t^2} \quad \text{et} \quad G(\gamma) := \int_0^\gamma g(\text{tg } \varphi) d\varphi.$$

Avec la condition $\alpha \geq 0,24$, on obtient $\psi(A) \leq 9.995$.

Deuxième cas : $\alpha < 0$, 24. On écrit ici $A = B + iC$, avec B et C auto-adjoints. Il est clair que 0 et 2 sont valeurs propres de B ; notons par $\mu \in [0, 2]$ la troisième valeur propre. Quitte à effectuer, si nécessaire, un demi-tour centré en 1, on peut supposer (ce que nous faisons ci-après) $\mu \in [1, 2]$.

On pose maintenant $\tau = \frac{1}{2} \text{Im}(\sigma_+(1) + \sigma_-(1))$; on a $-\alpha \leq \tau \leq \alpha$, d'après la convexité de $W(A)$. Cette convexité implique aussi

$$\text{Im} \sigma_+(x) \leq x \text{Im} \sigma_+(1) = (\alpha + \tau)x, \quad \text{si } x \in [1, 2].$$

De plus $x^2 + (\text{Im} \sigma_+(x))^2 \leq 4$, puisque $\text{diam } W(A) \leq 2$. On en déduit

$$(\text{Im} \sigma_+(x))^2 \left(1 + \frac{1}{(\alpha + \tau)^2}\right) \leq 4, \quad \text{si } x \in [1, 2].$$

Un raisonnement symétrique montre que cette majoration est encore valable pour $x \in [0, 1]$; en changeant α en $-\alpha$, elle se transpose à σ_- . On a ainsi

$$-\frac{2(\alpha - \tau)}{\sqrt{1 + (\alpha - \tau)^2}} \leq \text{Im} \sigma_-(x) \leq 0 \leq \text{Im} \sigma_+(x) \leq \frac{2(\alpha + \tau)}{\sqrt{1 + (\alpha + \tau)^2}}, \quad \text{si } x \in [0, 2].$$

On pose maintenant

$$\delta = \frac{\alpha + \tau}{\sqrt{1 + (\alpha + \tau)^2}} - \frac{\alpha - \tau}{\sqrt{1 + (\alpha - \tau)^2}}, \quad C_1 = C - \delta, \quad B_1 = B + i\delta.$$

On a, puisque C_1 est auto-adjoint,

$$\|C_1\| = \max\{|\langle Cv, v \rangle - \delta|; v \in \mathbb{C}^3, \|v\| = 1\} \leq \frac{\alpha + \tau}{\sqrt{1 + (\alpha + \tau)^2}} + \frac{\alpha - \tau}{\sqrt{1 + (\alpha - \tau)^2}}.$$

Notons que le membre de droite est maximum lorsque $\tau = 0$, on a donc

$$\|C_1\| \leq \gamma := \frac{2\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} < \frac{1}{2}.$$

Avec ces nouvelles notations $A = B_1 + iC_1$. la matrice B_1 est normale; si $z \in \mathbb{C}$ est situé à une distance $d = d(z) > \gamma$ des valeurs propres de B_1 , alors z appartient à la résolvante de A et on a

$$\|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z) - \gamma}, \quad d(z) = \min\{|z - i\delta|, |z - \mu - i\delta|, |z - 2 - i\delta|\}.$$

En particulier, pour $z = \frac{1}{2} + iy$ appartenant à la droite $\text{Re } z = \frac{1}{2}$, $d(z) = \sqrt{1/4 + (y - \delta)^2}$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres de A , numérotées par partie réelle croissante. λ_1 est l'unique valeur propre telle que $\text{Re } \lambda_1 < 1/2$, le projecteur spectral P_A associé à cette valeur propre est donné par

$$P_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \left(\frac{1}{2} + iy - A\right)^{-1} dy.$$

On a donc

$$P_A - P_B = P_A - P_{B_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2} + iy - A\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2} + iy - B_1\right)^{-1}\right) dy,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\|P_A - P_B\| &\leq \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1/4 + (y-\delta)^2}} \frac{1}{\sqrt{1/4 + (y-\delta)^2} - \gamma} dy \\ &\leq \frac{\gamma}{\pi\sqrt{1-4\gamma^2}} \arctan \frac{\sqrt{1+2\gamma}}{\sqrt{1-2\gamma}}.\end{aligned}$$

Notons maintenant $A_1 = \lambda_1$ la restriction de A à l'espace invariant associé à λ_1 (l'image de P_A), et A_2 la restriction de A à l'espace invariant associé à λ_2 et λ_3 (l'image de $I - P_A$). Pour tout polynôme p on a

$$p(A) = p(A)P_A + p(A)(1 - P_A) = p(\lambda_1)P_A + p(A_2)(1 - P_A).$$

Si le polynôme p est majoré par 1 sur l'image numérique $W(A)$, on a $|p(\lambda_1)| \leq 1$ et $\|p(A_2)\| \leq 2$. On en déduit

$$\|p(A)\| \leq \|P_A\| + 2\|1 - P_A\| \leq 3(1 + \|P_A - P_B\|),$$

en effet, la matrice B étant normale, on a $\|P_B\| = \|1 - P_B\| = 1$. Cela nous donne

$$\psi(A) \leq 3 + 3 \frac{\gamma}{\pi\sqrt{1-4\gamma^2}} \arctan \frac{\sqrt{1+2\gamma}}{\sqrt{1-2\gamma}}.$$

Avec le choix $\alpha < 0.24$, cela nous donne $\psi(A) < 9.898$.

References

- [1] M. Crouzeix, Numerical range, hilbertian functional calculus and applications, preprint, available from <http://perso.univ-rennes1.fr/michel.crouzeix/>

Institut de Recherche Mathématique de Rennes, UMR CNRS n° 6625
 Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex, France
michel.crouzeix@univ-rennes1.fr