Sur le problème de C. Neumann dans un secteur

Michel Crouzeix et Bernard Delyon

1 Introduction

On considère le secteur S_α du plan complexe

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha \text{ or } z = 0\}, \qquad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2},$$

dont on note par $\Gamma\alpha$ la frontière, orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Soit f une fonction holomorphe et bornée dans un voisinage de ce secteur, on peut alors la représenter sous la forme

$$f(z) = \int_{\Gamma_\alpha} g(\sigma)\,\mu(z, d\sigma), \quad \text{où} \quad \mu(z, d\sigma) = \mathrm{Re}\left(\frac{d\sigma}{2i\pi(\sigma - z)}\right) = \frac{1}{2\pi} d\arg(\sigma - z),$$

où g est une fonction continue et bornée, définie sur Γ, vérifiant une estimation du type

$$\|g\|_\infty \leq D_\alpha \|f\|_\infty.$$

On notera par D_α la meilleure constante telle que cette estimation soit valide pour toute fonction f holomorphe. Dans [1] on donne l'estimation $D_\alpha \leq \pi/\alpha$, mais elle est très pessimiste au voisinage de zéro. Nous montrons ici la majoration plus précise

$$D_\alpha \leq 2 - \frac{2}{\pi} \log \tan\left(\frac{\alpha\pi}{4(\pi - \alpha)}\right), \tag{1}$$

et nous montrons qu'elle est asymptotiquement optimale au voisinage de 0.

2 Estimation de D_α

Pour alléger les notations nous omettons souvent l'indice α, de plus nous décomposons la frontière de S en $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \{0\}$ avec

$$\Gamma_\pm = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm\alpha\ ,\ z \neq 0\}.$$

D'après l'orientation rétrograde de la frontière, le module décroît sur Γ_+ et croît sur Γ_-). On considère l'opérateur R :

$$Rg(z) \;=\; \int_\Gamma g(\sigma) \mathrm{Re}\left(\frac{d\sigma}{2i\pi(\sigma - z)}\right) = \int_\Gamma g(\sigma) \frac{1}{2\pi}\, d\arg(\sigma - z), \quad z \in \mathrm{int}\,(S)\,.$$

Cette fonction est bien définie pour z intérieur à S et $g \in \mathcal{C}_0(\Gamma)$

$$\mathcal{C}_0(\Gamma) \;=\; \{g\,;\, g \text{ bornée et continue sur } \Gamma\}\,.$$

On prolonge cette fonction Rg par continuité sur la frontière de S en posant $Rg(0) = \frac{\pi-\alpha}{\pi} g(0)$ et, pour $z \in \Gamma$ et $\varepsilon = \pm$,

$$Rg(z) \quad = \quad \frac{1}{2} g(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} g(\sigma)\ d \arg(\sigma - z), \quad z \in \Gamma_\varepsilon. \tag{2}$$

En restriction à Γ on peut donc écrire $Rg = \frac{1}{2}(g + Pg)$ où

$$Pg(z) \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_{-\varepsilon}} g(\sigma)\ d \arg(\sigma - z), \quad z \in \Gamma_\varepsilon. \tag{3}$$

On a clairement $P1 = 1 - 2\alpha/\pi$ et (pour la norme d'opérateur induite par la norme uniforme sur $C_0(\Gamma)$) $\|P\| = 1 - 2\alpha/\pi$. Il en résulte l'inversibilité de R et l'estimation $D_\alpha \leq \|R^{-1}\| \leq \pi/\alpha$ mentionnée dans l'introduction.

Afin d'obtenir une estimation plus précise on va utiliser l'analyticité de f ; on a en fait $D_\alpha = \|(R^{-1})_a\|$, o ù l'indice a signifie que l'on s'est restreint aux fonctions analytiques.
Remarque. Considérons la fonction positive $\varphi_\varepsilon(z) = (1 + |z|)^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, on a (avec $\sigma = \tau \bar{z}$)

$$\frac{(P\varphi_\varepsilon)(z)}{\varphi_\varepsilon(z)} = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_\pm} \Big(\frac{1+|z|}{1+|\sigma|}\Big)^\varepsilon\ d\arg(\sigma - z) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \max(1, \frac{1}{\tau^\varepsilon})\ d\arg(\tau - e^{2i\alpha}).$$

le membre de droite tend vers $1 - 2\alpha/\pi$ quand $\varepsilon \to 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ et $c < 1$ tels que $(P\varphi_\varepsilon)(z) \leq c\,\varphi_\varepsilon(z)$, $\forall z \in \Gamma$. Comme P envoie les fonctions positives sur les fonctions positives, on en déduit

$$|f| \leq C\varphi_\varepsilon \Rightarrow |R^{-1}f| = 2|(I+P)^{-1}f| \leq 2C(I-P)^{-1}\varphi_\varepsilon \leq \frac{2C}{1-c}\varphi_\varepsilon.$$

En particulier, si f est une fraction rationnelle telle que $f(\infty) = 0$ alors la majoration $|f| \leq C\varphi_\varepsilon$ tient pour une certaine constante C et donc $g = R^{-1}f$ vérifie $g(z) = O(z^{-\varepsilon})$ lorsque $z \to \infty$.

On introduit maintenant les fonctions $g_+(\rho) = g(\rho e^{i\alpha})$ et $g_-(\rho) = g(\rho e^{-i\alpha})$. Si $G_\pm(\omega)$ désigne la transformée de Fourier de $g_\pm(e^x)$, on a

$$g_\pm(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int \rho^{i\omega} G_\pm(\omega) d\omega.$$

On utilise des notations similaires avec f. Le lemme suivant montre que la transformée de Fourier *diagonalise* R :

Lemme 1 *La relation $f = Rg$ se réécrit*

$$\begin{pmatrix} F_+(\omega) \\ F_-(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & n_\alpha(\omega) \\ n_\alpha(\omega) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_+(\omega) \\ G_-(\omega) \end{pmatrix}$$

avec

$$n_\alpha(\omega) = \frac{\sinh(\pi - 2\alpha)\omega}{\sinh(\pi\omega)}.$$

Preuve. Supposons $\|G_-\|_1 < \infty$. La relation (3) donne, si $z \in \Gamma_+$:

$$\begin{aligned}
Pg(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_-} g(\sigma)\mathrm{Re}\left(\frac{d\sigma}{i(\sigma - z)}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}_+} g_-(y)\left(\frac{1}{y-\rho e^{2i\alpha}} - \frac{1}{y-\rho e^{-2i\alpha}}\right)dy \\
&= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} y^{i\omega}G_-(\omega)\left(\frac{1}{y-\rho e^{2i\alpha}} - \frac{1}{y-\rho e^{-2i\alpha}}\right)dyd\omega \\
&= \frac{1}{4i\pi^2}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \rho^{i\omega}x^{i\omega}G_-(\omega)\left(\frac{1}{x- e^{2i\alpha}} - \frac{1}{x- e^{-2i\alpha}}\right)dxd\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \rho^{i\omega}G_-(\omega)n_\alpha(\omega)d\omega
\end{aligned}$$

avec

$$n_\alpha(\omega) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty x^{i\omega}\left(\frac{1}{x- e^{2i\alpha}} - \frac{1}{x- e^{-2i\alpha}}\right)dx.$$

D'où

$$F_+(z) = \frac{1}{2}G_+(z) + \frac{1}{2}n_\alpha(\omega)G_-(\omega)$$

et de même

$$F_-(z) = \frac{1}{2}G_-(z) + \frac{1}{2}n_\alpha(\omega)G_+(\omega).$$

On explicite la fonction n_α via un calcul de résidu :

$$n_\alpha(\omega) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega u}\left(\frac{1}{e^u- e^{2i\alpha}} - \frac{1}{e^u- e^{-2i\alpha}}\right)e^u du$$

si $\omega > 0$ on intègre avec un chemin dans le demi-plan supérieur. Les pôles sont $u_k = 2i\alpha + 2ik\pi$, $k \geq 0$, et $v_k = -2i\alpha + 2ik\pi$, $k > 0$; d'où

$$n_\alpha(\omega) = \sum_{k\geq 0} e^{i\omega(2i\alpha+2ik\pi)} - \sum_{k>0} e^{i\omega(-2i\alpha+2ik\pi)} = \frac{\sinh(\pi-2\alpha)\omega}{\sinh(\pi\omega)}.$$

$\blacksquare$

Afin d'améliorer notre première borne on utilise maintenant l'analyticité de f dans S, qui se traduit en :

$$F_+(\omega) = e^{-2\omega\alpha}F_-(\omega) \tag{4}$$

En effet, le cas $f = 1$ est évident et le cas $f(z) = (1+z)^{-1}$ s'obtient par un calcul direct ; on peut donc considérer uniquement le cas $f(0) = f(\infty) = 0$. Alors, puisque f est une fraction rationnelle, $f(e^{x+i\alpha})$ décroît exponentiellement à l'infini. On a

$$\begin{aligned}
F_+(\omega) &= \int f(e^{x+i\alpha})e^{-i\omega x}dx = \int_{\mathbb{R}+i\alpha} f(e^z)e^{-i\omega(z-i\alpha)}dz \\
&= \int_{\mathbb{R}-i\alpha} f(e^z)e^{-i\omega(z-i\alpha)}dz = e^{-2\omega\alpha}\int f(e^{x-i\alpha})e^{-i\omega x}dx.
\end{aligned}$$

Le lemme 1 implique :

$$\begin{pmatrix} G_+(\omega) \\ G_-(\omega) \end{pmatrix} = \frac{2}{1-n_\alpha(\omega)^2} \begin{pmatrix} 1 & -n_\alpha(\omega) \\ -n_\alpha(\omega) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_+(\omega) \\ F_-(\omega) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} G_+(\omega) &= \frac{2}{1-n_\alpha(\omega)^2} F_+(\omega) - \frac{2n_\alpha(\omega)}{1-n_\alpha(\omega)^2} F_-(\omega) \\ &= 2F_+(\omega) - 2\,\frac{n_\alpha(\omega) - n_\alpha(\omega)^2 e^{-2\omega\alpha}}{1-n_\alpha(\omega)^2} F_-(\omega) \\ &= 2F_+(\omega) - 2\,\frac{e^{-2\alpha\omega} - e^{-2(\pi-\alpha)\omega}}{1-e^{-4(\pi-\alpha)\omega}} F_-(\omega). \end{aligned}$$

Posons (transformée de fourier inverse)

$$q(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{-2\alpha\omega} - e^{-2(\pi-\alpha)\omega}}{1-e^{-4(\pi-\alpha)\omega}} e^{it\omega} d\omega,$$

On a donc

$$g_+(e^\cdot) = 2f_+(e^\cdot) - q * f_-(e^\cdot) \qquad \text{et de même} \quad g_-(e^\cdot) = 2f_-(e^\cdot) - q * f_+(e^\cdot). \tag{5}$$

En utilisant que $\|q * v\|_\infty \leq \|q\|_1 \|v\|_\infty$, on en déduit

$$D_\alpha \leq 2 + \|q\|_1. \tag{6}$$

Si $t > 0$, on intègre avec un chemin dans l demi-plan supérieur. Alors, les pôles sont $\omega_k = ik\pi/2(\pi-\alpha)$, $k > 0$, et

$$\begin{aligned} q(t) &= 2i \sum \frac{1}{4(\pi-\alpha)} \left(e^{(-2\alpha+it)\omega_k} - e^{(-2\pi+2\alpha+it)\omega_k} \right) \\ &= \frac{i}{2(\pi-\alpha)} \left(\frac{e^{(-2\alpha+it)\omega_1}}{1-e^{(-2\alpha+it)\omega_1}} - \frac{e^{(-2\pi+2\alpha+it)\omega_1}}{1-e^{(-2\pi+2\alpha+it)\omega_1}} \right) \\ &= \frac{i}{2(\pi-\alpha)} \left(\frac{1}{e^{tr+2i\alpha r}-1} + \frac{1}{e^{tr}+1} \right), \quad r = \frac{\pi}{2(\pi-\alpha)} \\ &= \frac{i}{2(\pi-\alpha)} \left(\frac{e^{tr}(1+e^{2i\alpha r})}{(e^{tr+2i\alpha r}-1)(e^{tr}+1)} \right). \end{aligned}$$

Si $t < 0$, $q(t) = \overline{q(-t)}$. on a donc

$$\begin{aligned} \|q\|_1 &= 2\int_0^\infty |q(t)|\, dt \\ &= \frac{|1+e^{2i\alpha r}|}{(\pi-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{tr}}{|e^{tr+2i\alpha r}-1|(e^{tr}+1)} dt \\ &= \frac{2\,|1+e^{2i\alpha r}|}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{|x-e^{-2i\alpha r}|(x+1)} dx, \\ &= \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{2c}{(x^2-2c_2x+1)^{1/2}(x+1)} dx, \quad c = \cos(r\alpha), c_2 = \cos(2r\alpha). \end{aligned}$$

On remarque que l'intégrande est la dérivée de

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{c(x-1)}{(x^2-2c_2x+1)^{1/2}} \right)$$

donc finalement

$$\|q\|_1 \;=\; \frac{2}{\pi}\text{arctanh}(c) = \frac{1}{\pi}\log\frac{1+c}{1-c} = \frac{-2}{\pi}\log\tan(r\alpha/2).$$

et

$$D_\alpha \leq 2 - \frac{2}{\pi}\log\tan\left(\frac{\alpha\pi}{4(\pi-\alpha)}\right)$$

3 Optimalité

En prenant $f(z) = \frac{1-z^{\pi/2\alpha}}{1+z^{\pi/2\alpha}}$, on a $\|f\|_\infty = 1$, d'où $D_\alpha \geq \|g\|_\infty \geq |g(e^{i\alpha})|$. On déduit de (5) que $g(e^{i\alpha}) = -2i - (q * f_-(e^{\cdot}))(0)$. On a donc

$$D_\alpha \geq |(f_-(e^{\cdot}) * q)(0)| + O(1),$$

or

$$f_-(e^t) = f(e^{t-i\alpha}) = \frac{1+ie^{t\pi/2\alpha}}{1-ie^{t\pi/2\alpha}} = -\text{sgn}(t) + 2\varphi(\tfrac{t\pi}{2\alpha}),$$

$$\text{en posant} \qquad \varphi(\tau) = -\frac{i\,e^{-\tau}}{1+i\,\text{sgn}(\tau)\,e^{-\tau}}.$$

On vérifie facilement que

$$\|q\|_\infty \leq \frac{C}{\alpha}, \quad \text{et} \quad \|\varphi(\tfrac{\cdot\pi}{\alpha})\|_1 \leq \frac{4\,\alpha}{\pi} \quad \text{d'où} \quad D_\alpha \geq |(sgn * q)(0)| + O(1).$$

Par ailleurs,en remarquant que

$$q(t) = \frac{i}{2r(\pi-\alpha)}\,\frac{d}{dt}\,\text{Log}\frac{e^{2i\alpha r} - e^{-tr}}{1+e^{-tr}},$$

on en déduit

$$(sgn * q)(0) = \frac{2i}{2\,r(\pi-\alpha)}\,\text{Log}\frac{e^{2i\alpha r}-1}{2} = \frac{2i}{\pi}\,\text{Log}\alpha r + o(1) = \frac{2i}{\pi}\,\text{Log}\alpha + O(1).$$

Compte tenu des résultats du paragraphe précédent, on a obtenu l'estimation

$$D_\alpha = \frac{2}{\pi}\,\text{Log}\frac{1}{\alpha} + O(1).$$

References

[1] M. Crouzeix, "Une majoration du type von Neumann pour les fractions rationnelles d'opérateurs sectoriels", *C.R. Acad. Sci Paris*, t.330, Série 1, p 513–516, 2000.