

Interpolation dans \mathbb{R}^2 . La méthode des éléments finis

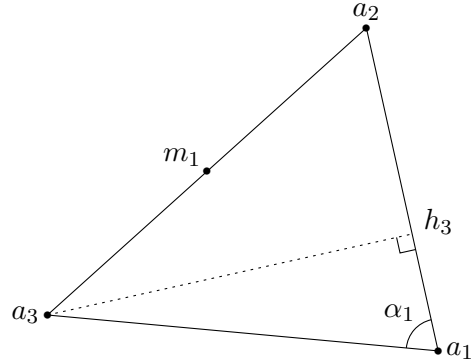
1 Interpolation polynomiale dans les triangles

On considère un triangle fermé K du plan, de sommets a_1, a_2, a_3 . Il est supposé non dégénéré, i.e. ses trois sommets ne sont pas alignés. On note

- $h_K = \text{diamètre de } K = \max |a_j - a_k|$,
- $\rho_K = \text{diamètre du cercle inscrit}$,
- $\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K}$ aplatissement de K .

Les relations

$$\begin{cases} \vec{m}x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) \vec{m}a_i \\ 1 = \lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x), \end{cases}$$



définissent trois fonctions $\lambda_i \in \mathbb{P}_1$, indépendantes de m .

Ces trois réels $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)$, sont appelés les coordonnées barycentriques du point x . On note α_i la mesure de l'angle au sommet a_i , $\alpha = \min_i(\alpha_i)$, h_i le pied de la hauteur issue de a_i . On a les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_i(a_j) &= \delta_{ij}, \quad \lambda_1(x) = \frac{\text{aire}(x a_2 a_3)}{\text{aire}(a_1 a_2 a_3)}, \quad \vec{\nabla} \lambda_i = \frac{\vec{h}_i a_i}{|h_i a_i|^2}, \quad \int_K \vec{\nabla} \lambda_2 \cdot \vec{\nabla} \lambda_3 \, dx = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha_1}, \\ |\vec{\nabla} \lambda_1| + |\vec{\nabla} \lambda_2| + |\vec{\nabla} \lambda_3| &= \frac{2}{\rho_K}, \quad \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha/2} \leq \sigma_K \leq \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Pour divers calculs d'intégrales, la formule de Dirichlet pourra se révéler utile

$$\int_K \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \lambda_3^{k_3} \, dx = 2 |K| \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!}, \quad \text{avec } |K| = \text{aire}(K).$$

Démonstration. Nous montrons seulement les formules (1), laissant les autres en exercices.

a) On a

$$2|K| = |a_1 a_3| |a_2 h_2| = |a_2 a_3| |a_1 h_1| = |a_1 a_2| |a_3 h_3|,$$

$$\text{d'où } |\vec{\nabla} \lambda_1| + |\vec{\nabla} \lambda_2| + |\vec{\nabla} \lambda_3| = \frac{|a_1 a_2| + |a_2 a_3| + |a_1 a_3|}{2|K|} = \frac{2}{\rho_K}.$$

b) Supposons par exemple que $a_1 a_3$ soit le plus grand côté. Alors on a $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_3)$ et

$$h_K = |a_1 a_3| = \frac{\frac{\rho_K}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} + \frac{\frac{\rho_K}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\rho_K}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \leq h_K \leq \frac{\rho_K}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

□

Théorème 1. (Interpolation linéaire) Soit $v \in C^0(K)$ donné. Alors il existe un unique élément $r_K v \in \mathbb{P}_1$ tel que l'on ait

$$r_K v(a_j) = v(a_j) \text{ pour } j = 1, 2, 3. \text{ Il est donné par } r_K v(x) = \sum_{j=1}^3 v(a_j) \lambda_j(x).$$

De plus, si $v \in W^{2,p}(\overset{\circ}{K})$, on a les estimations d'erreur

$$\|v - r_K v\|_{L^p(K)} \leq h_K^2 \|D^2 v\|_{L^p(K)}, \quad \text{et} \quad \|D(v - r_K v)\|_{L^p(K)} \leq (1 + \sigma_K) h_K \|D^2 v\|_{L^p(K)}.$$

Démonstration. Pour alléger les notations, on omettra l'indice K dans h_K, ρ_K, \dots

a) Il est clair que $r_K v(x) = \sum_{j=1}^3 v(a_j) \lambda_j(x)$ convient, ce qui prouve l'existence. L'unicité se déduit du fait que par trois points non alignés il ne passe qu'un seul plan.

Remarques.

1) L'application $r_K, v \mapsto r_K v$ est un projecteur linéaire sur \mathbb{P}_1 ,

2) en particulier $\forall p \in \mathbb{P}_1, \quad p(x) = \sum_{j=1}^3 p(a_j) \lambda_j(x)$,

3) si $w \in C^0(K)$, on a $\|(I - r_K)w\|_{L^\infty(K)} \leq 2\|w\|_{L^\infty(K)}$

$$\text{et} \quad \|D r_K w\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{2}{\rho} \|w\|_{L^\infty(K)}.$$

b) En utilisant le théorème 12 du chapitre précédent on en déduit (notons que $T_1 v \in \mathbb{P}_1$)

$$\|v - r_K v\|_{L^\infty(K)} \leq \|(I - r_K)(v - T_1 v)\|_{L^\infty(K)} \leq 2\|v - T_1 v\|_{L^\infty(K)} \leq \frac{h^2}{|K|} \|D^2 v\|_{L^1(K)}.$$

On déduit alors la première estimation des inégalités

$$\|v - r_K v\|_{L^p(K)} \leq |K|^{\frac{1}{p}} \|v - r_K v\|_{L^\infty(K)} \quad \text{et} \quad \|D^2 v\|_{L^1(K)} \leq |K|^{1-\frac{1}{p}} \|D^2 v\|_{L^p(K)}.$$

c) On part de $D(v - r_K v) = D(v - T_1 v) + D r_K(T_1 v - v)$. En utilisant le théorème 12, on déduit

$$\begin{aligned} \|D(v - r_K v)\|_{L^p(K)} &\leq \|D(v - T_1 v)\|_{L^p(K)} + |K|^{1/p} \|D r_K(T_1 v - v)\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq h \|D^2 v\|_{L^p(K)} + |K|^{1/p} \frac{2}{\rho} \|T_1 v - v\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq h \|D^2 v\|_{L^p(K)} + |K|^{1/p} \frac{h^2}{\rho |K|} \|D^2 v\|_{L^1(K)} \leq h(1 + \sigma) \|D^2 v\|_{L^p(K)}. \end{aligned}$$

□

Remarque. On voit que lorsque σ_K devient grand (c'est-à-dire lorsque le triangle s'applatit) l'approximation des dérivées peut se détériorer.

2 Espaces d'éléments finis de Lagrange

Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 ; on s'en donne une approximation Ω_h polygonale (ouverte, bornée, connexe) et on considère une triangulation \mathcal{T}_h de Ω_h . Cela signifie que $\overline{\Omega}_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$, où les K sont les triangles (fermés) de la triangulation. On supposera toujours que

\mathcal{T}_h est un ensemble fini, de plus si K et $K' \in \mathcal{T}_h$ alors

soit $K \cap K' = \emptyset$, soit $K = K'$,

soit $K \cap K'$ est un côté commun à K et K' ,

soit $K \cap K'$ est un sommet commun à K et K' .

On utilisera les notations suivantes : $h_K =$ diamètre de K , $\rho_K =$ diamètre du cercle inscrit dans K ,

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \text{ applatissement de } K \quad \text{et} \quad h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K.$$

Si on considère une famille de triangulation \mathcal{T}_h (indexée par $h > 0$), on dira que cette famille est régulière si :

il existe $\sigma < +\infty$ tel que $\forall h > 0, \forall K \in \mathcal{T}_h, \sigma_K \leq \sigma$;

on dira que cette famille est quasi-uniforme si :

il existe C tel que $\forall h > 0, \forall K \in \mathcal{T}_h, h \leq C \rho_K$.

On supposera toujours la famille régulière ; on évitera, autant que faire ce peut, l'hypothèse de quasi-uniformité qui interdit de faire des raffinements de maillage.

Remarque : la lettre h joue un rôle très ambigu. D'une part on l'utilise comme un nombre réel qui mesure le plus grand des diamètres des triangles, d'autre part comme l'indice décrivant la triangulation (or deux triangulations différentes peuvent avoir le même h !). Cela n'engendrant aucune réelle difficulté, on gardera cette notation qui est universellement utilisée.

Pour l'approximation du problème de Neumann on utilisera l'espace d'éléments finis

$$W_h = \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}_h) ; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_1\}.$$

Lemme 2. *On a $W_h \subset H^1(\Omega_h)$. De plus toute fonction de W_h est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets s_j des triangles $K \in \mathcal{T}_h$. Elle y prend des valeurs arbitraires.*

Démonstration. a) $W_h \subset H^1(\Omega_h)$ est une conséquence immédiate du corollaire 21 du chapitre précédent. Il est clair que la connaissance des $v_h(s_j)$ aux sommets de chaque triangle K , définit de manière unique la fonction v_h sur ce même triangle, donc sur $\overline{\Omega}$.

b) Si on se donne des valeurs u_j aux points s_j , on peut trouver sur chaque triangle K une fonction u_h^K qui vaut u_j aux trois sommets de K (théorème 1).

En restriction à un côté K' commun à K_1 et K_2 , les fonctions $u_h^{K_1}$ et $u_h^{K_2}$ sont bien définies. De plus ce sont deux polynômes à une variable qui coïncident aux deux sommets extrémités, ils coïncident donc sur tout le côté.

On peut donc définir sans ambiguïté sur $\overline{\Omega}_h$ la fonction u_h par $u_h(x) = u_h^K(x)$ si $x \in K$. Elle est continue en tout point de $\overline{\Omega}_h$ (c'est évident en un point intérieur à un triangle K , pour un point commun à plusieurs triangles K cela se déduit de la continuité sur chaque triangle le contenant), on a donc $u_h \in W_h$. \square

On note $\Sigma_h = \{s \in \overline{\Omega} ; s \text{ est sommet d'un } K \in \mathcal{T}_h\}$, $N = \text{Cardinal}(\Sigma_h)$. On numérote s_1, \dots, s_N ces sommets. Il résulte de ce qui précède

il existe des fonctions $\psi_j \in W_h$ telles que $\psi_j(s_i) = \delta_{ij}$, $i = 1, \dots, N$.

Théorème 3. *Soit $u \in H^2(\Omega_h)$. Il existe une fonction et une seule $r_h u \in \Omega_h$ telle que $r_h u(s) = u(s)$, $\forall s \in \Sigma_h$. On a les estimations d'erreur*

$$\|u - r_h u\|_{0, \Omega_h} \leq h^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega_h)}, \quad \|D(u - r_h u)\|_{0, \Omega_h} \leq h(1 + \sigma) \|D^2 u\|_{L^2(\Omega_h)},$$

avec $\sigma = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma_K$.

Démonstration. a) L'injection de Sobolev $H^2(\Omega_h) \subset C^0(\overline{\Omega}_h)$ assure que u est continue, et donc que $u(s)$ est bien définie. La fonction $r_h u(x) = \sum_{j=1}^N u(s_j) \psi_j(x)$ convient. L'unicité se déduit du lemme précédent.

b) Pour les majorations, on remarque par exemple que

$$\|u - r_h u\|_{0, \Omega_h}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u - r_K u\|_{L^2(K)}^2 \leq \dots$$

On utilise ensuite le théorème 1. □

Remarque. Lorsque $\Omega = \Omega_h$ est un polygone, on déduit de la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ (et donc a fortiori de $H^2(\Omega)$) dans $H^1(\Omega)$ que l'on a, pour toute famille régulière de triangulation \mathcal{T}_h ,

$$\text{lorsque } u \in H^1(\Omega), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} = 0$$

Pour approcher le problème de Dirichlet on utilisera l'espace

$$V_h = W_h \cap H_0^1(\Omega_h) = \{v_h \in W_h; v_h|_{\partial\Omega_h} = 0\}.$$

Remarquons que l'on a aussi $V_h = \{v_h \in W_h; v_h(s) = 0, \forall s \in \Sigma_h \cap \partial\Omega_h\}$. On a donc, lorsque $u \in H^2(\Omega_h) \cap H_0^1(\Omega_h)$, $r_h u \in V_h$ et les majorations du théorème précédent s'appliquent.

Notons $\Sigma'_h = \{s \in \Sigma_h; s \notin \partial\Omega_h\}$.

l'ensemble $\{\psi_j; s_j \in \Sigma_h\}$ forme une base de W_h ,

l'ensemble $\{\psi_j; s_j \in \Sigma'_h\}$ forme une base de V_h .

3 L'approximation interne

On considère deux espaces de Hilbert $V \subset W$, V étant un sous-espace fermé de W . Ils seront munis de la même norme $\|\cdot\|$. On se donne aussi un élément $u_0 \in W$, une forme linéaire continue $\ell \in V'$, une forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$,

on suppose a continue sur $W \times V$: $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|, \forall u \in W, \forall v \in V$,

on suppose a V -elliptique : $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \forall v \in V (\alpha > 0)$.

On veut approcher le problème

$$(P) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in u_0 + V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = (\ell, v). \end{cases}$$

Une méthode d'approximation interne consiste à se donner deux espaces de dimensions finies $W_h \subset W, V_h = W_h \cap V$. On se donne aussi une approximation $u_{0h} \in W_h$ de u_0 et on considère le problème approché

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in u_{0h} + V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = (\ell, v_h). \end{cases}$$

Théorème 4. *Les problèmes (P) et (P_h) ont chacun une solution unique. De plus on a l'estimation d'erreur*

$$\|u - u_h\| \leq (1 + \frac{M}{\alpha}) \inf_{w_h \in u_{0h} + V_h} \|u - w_h\|.$$

Démonstration. L'existence et l'unicité se déduisent immédiatement du corollaire 29 du chapitre précédent. Notons que, en dimension finie, les formes linéaires et bilinéaires sont automatiquement continues et les espaces sont fermés.

On remarque d'autre part que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \text{en effet } V_h \subset V.$$

Soit alors $w_h \in u_{0h} + V_h$ et u_h solution de (P_h) , on a $u_h - w_h \in V_h$, donc

$$\alpha \|u_h - w_h\|^2 \leq a(u_h - w_h, u_h - w_h) = a(u - w_h, u_h - w_h) \leq M \|u - w_h\| \|u_h - w_h\|.$$

On en déduit $\|u_h - w_h\| \leq (M/\alpha) \|u - w_h\|$; on conclut grâce à l'inégalité triangulaire. \square

4 La méthode des éléments finis : le problème de Neumann

Pour simplifier on supposera désormais $\Omega = \Omega_h$, donc Ω est nécessairement un polygone. On reprend l'exemple 1 décrit au chapitre précédent : $W = H^1(\Omega)$, on considère des données $a \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, et on pose

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\nabla \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + a(x) u(x) v(x) \right) dx, \\ (\ell, v) &= \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \gamma_0 v(x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

On fait d'autre part l'hypothèse :

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 < a_m \leq a(x) \leq a_M.$$

On considère le problème de Neumann

$$(P) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u, v) = (\ell, v), \end{cases}$$

et son approximation éléments finis

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in W_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in W_h, \quad a(u_h, v_h) = (\ell, v_h). \end{cases}$$

On est dans le cadre du paragraphe précédent, avec ici

$$V = W = H^1(\Omega), \quad V_h = W_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}_h); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}_1\}, \quad u_0 = u_{0h} = 0.$$

On a donc l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \left(1 + \frac{\max(1, a_M)}{\min(1, a_m)}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|u - w_h\|_{1,\Omega}.$$

Si on a la régularité $u \in H^2(\Omega)$, en choisissant $w_h = r_h u$ donné par le théorème 3, on a

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \left(1 + \frac{\max(1, a_M)}{\min(1, a_m)}\right) h(1 + \sigma + h) \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C h \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si l'on suppose seulement $u \in H^1(\Omega)$ on a, pour toute famille régulière de triangulations, $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1,\Omega} = 0$.

La méthode de dualité de Aubin-Nitsche.

On suppose ici que Ω est convexe. Il est alors possible d'obtenir une estimation meilleure dans l'espace $L^2(\Omega)$. Pour cela, on remarque qu'il existe g tel que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (u - u_h) g(x) dx, \quad g \in L^2(\Omega), \quad \|g\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Un tel g étant choisi, on définit $w \in H^1(\Omega)$ solution du problème

$$(P^*) \quad \begin{cases} \text{trouver } w \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad a(v, w) = \int_{\Omega} v(x) g(x) dx. \end{cases}$$

Il est alors connu (théorème 31) que $w \in H^2(\Omega)$ et que $\|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)} = C$. On a alors, puisque $u - u_h \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_h) g(x) dx &= a(u - u_h, w) = a(u - u_h, w - r_h w) \\ &\leq \max(1, a_M) \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|w - r_h w\|_{1,\Omega} \\ &\leq \max(1, a_M) \|u - u_h\|_{1,\Omega} h(1 + \sigma + h) \|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C' h \|u - u_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Finalement nous avons montré que, si $u \in H^2(\Omega)$, alors $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C'' h^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$.

5 Quelques considérations sur la mise en œuvre

On connaît une base $\{\psi_j; j = 1, \dots, N\}$ de W_h ; on a, au sommet $s_i \in \Sigma_h$, $\psi_j(s_i) = \delta_{ij}$. Étant donné une fonction $u_h \in W_h$, elle s'écrit $u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j(x)$ en posant $u_j = u_h(s_j)$. Il est clair que le problème (P_h) décrit au paragraphe précédent équivaut à

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j \psi_j \quad \text{et} \quad a(u_h, \psi_i) = (\ell, \psi_i), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

On est donc en présence d'un système linéaire de N équations à N inconnues : u_1, \dots, u_N . Posons

$$k_{ij} = a(\psi_j, \psi_i), \quad f_i = (\ell, \psi_i), \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & k_{1N} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ k_{N1} & \cdot & \cdot & k_{NN} \end{pmatrix}.$$

Le système précédent, et donc le problème (P_h) , équivaut ainsi à $KU = F$. Décrit comme ceci la résolution numérique peut paraître, de prime abord, une simple formalité. Pourtant sa mise en œuvre effective demande un travail conséquent :

- Notons tout d'abord que N peut être grand, par exemple prendre des valeurs entre 100 pour des petits problèmes et 100 000... La matrice K (appelée matrice de rigidité) est $N \times N$! Heureusement elle est très *creuse* : $a(\psi_j, \psi_i) = 0$ dès que s_j et s_i n'appartiennent pas à un même triangle. Il faudra que la méthode de résolution numérique tire partie de cette structure pour être efficace.

- Avant de résoudre le système linéaire, il faut d'abord construire (on dit assembler) la matrice de rigidité ainsi que le second membre F . Pour cela on remarque que

$$a(\psi_j, \psi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_K(\psi_j, \psi_i), \quad \text{avec} \quad a_K(\psi_j, \psi_i) = \int_K \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, dx + \int_K a \psi_j \psi_i \, dx,$$

$$(\ell, \psi_i) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\ell, \psi_i)_K, \quad \text{avec} \quad (\ell, \psi_i)_K = \int_K f \psi_i \, dx + \int_{\partial\Omega \cap K} g \psi_i \, dx.$$

On construit d'abord, pour chaque élément K de la triangulation, la matrice de rigidité élémentaire $a_K(\psi_j, \psi_i)$ (qui a au plus 9 coefficients non nuls) ainsi que la contribution de cet élément au second membre (au plus trois termes non nuls). Ensuite, voire simultanément, on effectue la somme sur les $K \in \mathcal{T}_h$ (i.e. l'assemblage), heureusement l'addition est commutative...

- Pour effectuer l'étape précédente, il fallait connaître la triangulation (on dit aussi le maillage). Cela signifie que l'on a, au préalable, numéroté les triangles d'une part, les sommets d'autre part, et que l'on est capable de dire pour un triangle donné quels sont ses sommets (avec les coordonnées correspondantes), s'il est ou non au bord... Cela n'est pas toujours suffisant pour calculer les intégrales de l'étape précédente; il faudra généralement utiliser aussi des intégrations approchées...
- La fabrication d'une bonne triangulation n'est pas une étape facile. D'autant plus qu'il est souvent souhaitable de la modifier après les premiers calculs (maillages adaptatifs). Les vrais problèmes sont en dimension 3, et la réalisation de bons maillages 3-D relève du grand art.

6 La méthode des éléments finis : le problème de Dirichlet

Comme pour Neumann on suppose Ω polygonal borné et $\Omega = \Omega_h$. On prend maintenant $W = H^1(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$; on considère des données $a \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ et on pose

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\nabla u \cdot \nabla v + a(x) u(x) v(x) \right) dx, \quad (\ell, v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

On fait l'hypothèse :

$$\forall x \in \Omega, \quad 0 \leq a(x) \leq a_M,$$

on considère le problème de Dirichlet

$$(P) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in u_0 + H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = (\ell, v), \end{cases}$$

et son approximation éléments finis, $u_{0h} \in W_h$ approximation de u_0 donnée,

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in u_{0h} + V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = (\ell, v_h). \end{cases}$$

On est dans le cadre du paragraphe 3; on a donc l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \left(1 + \frac{\max(1, a_M)}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in u_{0h} + V_h} \|u - w_h\|_{1,\Omega}.$$

Si on a la régularité $u \in H^2(\Omega)$, en choisissant $w_h = r_h u + u_{0h} - r_h u_0$, on a

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \left(1 + \frac{\max(1, a_M)}{\alpha}\right) h(1 + \sigma + h) \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{0h} - r_h u_0\|_{1,\Omega}.$$

Un choix naturel consiste à prendre $u_{0h} = r_h u_0$; on a alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}.$$

La méthode de dualité de Aubin-Nitsche : le cas homogène.

On suppose maintenant que Ω est convexe et $u_0 = u_{0h} = 0$. On veut améliorer l'estimation dans l'espace $L^2(\Omega)$. Pour cela, on remarque qu'il existe g tel que

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} (u - u_h) g(x) dx, \quad g \in L^2(\Omega), \quad \|g\|_{L^2(\Omega)} = 1.$$

Un tel g étant choisi, on définit $w \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème

$$(P^*) \quad \begin{cases} \text{trouver } w \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, w) = \int_{\Omega} v(x) g(x) dx. \end{cases}$$

Il est alors connu (théorème 31) que $w \in H^2(\Omega)$ et que $\|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|g\|_{L^2(\Omega)} = C$. On a alors, puisque $u - u_h \in H_0^1(\Omega)$ et $r_h w \in V_h$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - u_h) g(x) dx &= a(u - u_h, w) = a(u - u_h, w - r_h w) \\ &\leq \max(1, a_M) \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|w - r_h w\|_{1,\Omega} \\ &\leq \max(1, a_M) \|u - u_h\|_{1,\Omega} h(1 + \sigma + h) \|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C' h \|u - u_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Finalement nous avons montré que, si $u \in H^2(\Omega)$, alors $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C'' h^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$.

La méthode de dualité de Aubin-Nitsche : le cas non homogène.

On suppose encore Ω est convexe, mais $u_0 \neq 0$ et on prend $u_{0h} = r_h u_0$. On commence comme précédemment, mais maintenant, a priori, $u - u_h \notin H_0^1(\Omega)$. D'après (P^*) on a $g = -\Delta w + a w$. Donc (en remarquant que $r_h w \in V_h$)

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} (u - u_h) g(x) dx = \int_{\Omega} (u - u_h) (-\Delta w + a w) dx \\ &= a(u - u_h, w) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} (u - u_h) d\sigma \\ &= a(u - u_h, w - r_h w) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} (u_0 - r_h u_0) d\sigma \\ &\leq C h^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \|u_0 - r_h u_0\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|\nabla w\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|w\|_{2,\Omega}, \quad \text{et} \quad \|u_0 - r_h u_0\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq h^2 \|D^2 u_0\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

La première majoration se déduit de la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, la deuxième est une majoration d'erreur d'interpolation en dimension 1. En conclusion :

$$\left(\text{si } u_0|_{\partial\Omega} \in H^2(\partial\Omega)\right), \text{ alors} \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = O(h^2).$$