SEMINAIRE DE MONSIEUR BENABOU

1973 - 74

EXPOSE DE M. COSTE

LOGIQUE DU 1er ORDRE DANS LES TOPOS ELEMENTAIRES

LOGIQUE DU 1^{er} ORDRE
DANS LES TOPOS ELEMENTAIRES

Ce papier suppose connues les notions de base sur les topos élémentaires que l'on peut trouver dans [1] . Pour des raisons de commodité , les notations sont légèrement différentes en ce qui concerne les "opérateurs logiques" des topos : $\Rightarrow$, $\exists$, $\forall$ sont remplacés par $\rightarrow$, $\bigvee$, $\bigwedge$.

De plus il est préférable d'avoir une idée des langages internes des topos de Bénabou , dont on trouvera une présentation succincte dans [2] .

Introduction

(Les exemples font appel au langage interne des topos) .

Depuis que l'on manie les langages internes des topos , on se demande quelles sont les formules "vraies" dans les topos . On sait de façon empirique que les topos possèdent une "logique" qui ressemble à l'intuitionnisme : Ainsi l'objet classificateur d'un topos est muni d'une structure d'algèbre de Heyting .

Cependant certaines choses ne se passent pas comme dans l'intuitionnisme ordinaire . Par exemple la formule $\bigwedge x\ rx \rightarrow \bigvee x\ rx$ qui est un théorème intuitionniste n'est pas en général vraie dans un topos .

> Si x est de type X et $r = v_X : X \rightarrow \Omega$, la valeur de $\bigwedge x\ rx \rightarrow \bigvee x\ rx$ est la fonction caractéristique du support de X (image de la flèche $X \rightarrow 1$) . Il n'y a aucune raison pour que ce soit $v : X \rightarrow \Omega$.

Le but de ce papier est de préciser la logique du 1^{er} ordre qui fonctionne dans les topos , ce qui sera fait par la description d'un système de déduction adéquat . Les idées principales sont les suivantes :

1) Le langage interne d'un topos est lié à un topos particulier et même aux situations particulières à l'intérieur de ce topos

particulier . J'entends par là que tout type de variable , tout symbole de relation ou de fonction est lié de façon immuable à un objet ou à une flèche donné du topos , ce qui ne laisse aucune latitude à l'interprétation du langage . Le point de vue du langage interne apparaît ici comme peu commode pour énoncer des propriétés générales . C'est pourquoi le point de vue adopté dans la suite est celui de la logique ordinaire : Le langage est donné à priori , ensuite on considère les réalisations de ce langage dans les topos . Ce sont les propriétés de cette nouvelle sémantique qui sont à étudier .

2) En logique ordinaire , on est quelquefois amené à considérer qu'une formule a plus de variables libres qu'elle n'en a réellement . Souvent l'écriture $\Phi(a_1,\ldots,a_n)$ signifie que les variables libres de Φ sont parmi $a_1,\ldots,a_n$ et non que $a_1,\ldots,a_n$ sont toutes des variables libres de Φ . Cela n'introduit aucune complication . Dans les topos , il en va tout autrement .

> Soit Φ une formule avec une seule variable libre a de type X . Sa valeur est une flèche $|\Phi(a)| : X \to \Omega$. Si b est une variable de type Y et si on considère Φ comme formule en les variables libres a et b , on peut lui attribuer la valeur $|\Phi(a,b)| : X \times Y \to \Omega$ qui est la composée de $|\Phi(a)|$ avec la projection canonique $X \times Y \to X$. L'ennui , c'est que $|\Phi(a,b)|$ peut très bien être le vrai de $X \times Y$ sans que $|\Phi(a)|$ soit le vrai de X . Ceci empêche d'appliquer tel quel le modus ponens : Si $|\Psi(b)|$ est le vrai de Y et $|\Psi(b) \to \Phi(a)|$ est le vrai de $X \;\; Y$, il se peut que $|\Phi(a)|$ ne soit pas le vrai de Y bien que $|\Phi(a,b)|$ soit le vrai de $X \times Y$.

La cause de cette difficulté est que dans les topos les projections ne sont pas des épimorphismes -autrement dit que tous les objets ne sont pas de support 1 - . Ceci est aussi vrai pour le topos $\mathbb{E}ns$ dans lequel on fait la logique classique ordinaire , mais dans ce cas on s'en tire en refusant les réalisations vides .

L'idée qui peut venir pour tourner la difficulté est la suivante : préciser à chaque fois l'ensemble des variables que l'on veut considérer. Ceci amènera à remplacer les séquences de Gentzen $\Gamma \vdash \Delta$ où Γ et Δ sont des suites finies de formules par les séquences $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ où V est un ensemble fini de variables comprenant les variables libres qui apparaissent dans Γ et Δ.

Sémantique

Dans la suite , $\mathcal{L}$ désignera un langage du 1er ordre .
$\mathcal{L}$ comprend :

- Un ensemble dénombrable de types (désignés par $i,j,\ldots$)
- Pour chaque type i un ensemble dénombrable de variables qui seront employées comme variables libres (désignées par les lettres du début de l'alphabet) et un ensemble dénombrable de variables qui seront employées comme variables liées (désignées par des lettres de la fin de l'alphabet) . On spécifiera le type d'une variable par un exposant entre parenthèses : $a^{(i)}$ ou $x^{(i)}$.

  On supposera l'ensemble des variables libres de tous les types totalement ordonné .
- Un ensemble dénombrable de symboles de relations (désignées par $r,s,\ldots$ chacun muni d'une signature qui est une suite finie de types $(i_1,\ldots,i_m)$. $\mathcal{L}$ sera avec égalité si on a pour chaque type i le symbole $=_i$ qui est un symbole relationnel distingué de signature (i,i) .
- Un ensemble dénombrable de symboles de fonction (désignés par $f,g,\ldots$) chacun muni d'une signature qui est un couple formé d'une suite (peut être vide) de types et d'un type : $(i_1,\ldots,i_m;j)$. Une constante de type i aura comme signature $(\,.\, ; i)$.

Les termes de $\mathcal{L}$ sont formés à l'aide des règles suivantes :

- Les variables libres et les constantes sont des termes .
  Si une constante a pour signature $(\,;\, i)$, son type est i .
- Si $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes de types $i_1,\ldots,i_n$ et si f est un symbole de fonction de signature $(i_1,\ldots,i_n \,;\, j)$ alors $f(t_1,\ldots,t_n)$ est un terme de type j .

On notera $\sigma(t)$ l'ensemble des variables libres d'un terme t et $\tau(t)$ son type . On pourra spécifier ce type par un exposant entre parenthèse : $t^{(i)}$.

Les formules atomiques de $\mathcal{L}$ sont les expressions $r(t_1^{(i_1)}, \dots, t_n^{(i_n)})$ où r est un symbole de relation de signature $(i_1, \dots, i_n)$. Pour l'égalité on écrit $t_1^{(i)} =_i t_2^{(i)}$.

Les formules de $\mathcal{L}$ sont construites à partir des formules atomiques de $\mathcal{L}$ par l'application des règles suivantes :

- Si Φ et Ψ sont des formules , $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\neg \Phi$, $\Phi \to \Psi$ sont aussi des formules .
- Si $\Phi(a^{(i)})$ est une formule , $a^{(i)}$ étant une variable libre qui n'apparaît pas forcément dans Φ , soit $x^{(i)}$ une variable liée qui n'apparaît pas dans Φ et désignons par $\Phi(x^{(i)})$ le résultat de la substitution de $x^{(i)}$ à toutes les occurences de $a^{(i)}$ dans Φ. Alors $\bigvee x^{(i)}\ \Phi(x^{(i)})$ et $\bigwedge x^{(i)}\ \Phi(x^{(i)})$ sont des formules .

  On notera $\sigma(\Phi)$ l'ensemble des variables libres d'une formule Φ.

<u>E-réalisations de $\mathcal{L}$</u>

Soit E un topos . Une E-réalisation de $\mathcal{L}$ est la donnée des éléments suivants :

- Pour chaque type i , un objet X_i de E (objet de base de type i) .
- Pour chaque symbole de relation r de signature $(i_1, \dots, i_n)$ une flèche $|r| : X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n} \to \Omega$.

  Si $\mathcal{L}$ est avec égalité , $=_i$ sera interprété par la flèche $X_i \times X_i \xrightarrow{|=_i|} \Omega$ fonction caractéristique de la diagonale .

- Pour chaque symbole de fonction f de signature $(i_1, \dots, i_n ; j)$ une flèche $|f| : X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n} \to X_j$. Une constante $c^{(i)}$ sera interprétée par une flèche $1 \xrightarrow{|c|} X_i$.

Notation :

Si $V = \{a_1^{(i_1)}, \dots, a_n^{(i_n)}\}$ est un ensemble fini de variables libres supposées rangées dans l'ordre croissant , on notera X^V le produit

$X_{i_1} \ldots X_{i_n}$. Si V est vide $X^V = 1$.

Soit t un terme de $\mathcal{L}$, V un ensemble fini de variables libres contenant $\sigma(t)$. Au couple (t,V) on associe une flèche $|t,V| : X^V \to X_{\tau(t)}$ de la manière suivant :

- Si $t = a^{(i)}$, $|a^{(i)}, V|$ est la projection canonique $X^V \to X_i$
- Si $t = c^{(i)}$ est une constante de type i , $|c,V|$ est la composée de $|c|$ et de la flèche $X^V \to 1$:

$$|c,V| : X^V \to 1 \xrightarrow{|c|} X_i$$

- Si $t = f(t_1,\ldots,t_n)$, $|t,V| = |f| \circ (|t_1,V|,\ldots, |t_n,V|)$

$$|t,V| : X^V \xrightarrow{(|t_1,V|,\ldots,|t_n,V|)} X_{\tau(t_1)}\times\cdots\times X_{\tau(t_n)} \xrightarrow{|f|} X_{\tau(t)}$$

On remarque que si W et V sont des ensembles finis de variables libres tels que $W \supset V \supset \sigma(t)$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X^W \arrow[r, "|t,W|"] \arrow[d] & X_{\tau(t)} \\ X^V \arrow[ur, "|t,V|"'] & \end{tikzcd}$$

où la flèche $X^W \to X^V$ est la projection canonique commute .

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}$, V un ensemble fini de variables libres contenant $\sigma(\Phi)$. Au couple (Φ,V) on associe une flèche $|\Phi,V| : X^V \to \Omega$ de la manière suivante :

- Si $\Phi = r(t_1,\ldots,t_n)$ est atomique , $|\Phi,V| = |r| \circ (|t_1,V|,\ldots,|t_n,V|)$

$$|\Phi,V| : X^V \xrightarrow{(|t_1,V|,\ldots,|t_n,V|)} X_{\tau(t_1)}\times\cdots\times X_{\tau(t_n)} \xrightarrow{|r|} \Omega$$

- Si $\Phi = \Psi \wedge \theta$ (respectivement $\Psi \vee \theta$, $\Psi \to \theta$) .

$$|\Phi,V| = \wedge \circ (|\Psi,V| , |\theta,V|)$$

$$|\Phi,V| \; : \; X^V \xrightarrow{(|\Psi,V|,\; |\theta,V|)} \Omega \times \Omega \overset{\wedge}{\to} \Omega$$

(resp. $|\Phi,V| = \vee \circ (|\Psi,V|, |\theta,V|)$, $|\Phi,V| = \to \circ (|\Psi,V|, |\theta,V|)$)

- Si $\Phi = \neg \Psi$, $|\Phi,V| = \neg \circ |\Psi,V|$

$$|\Phi,V| \; : \; X^V \xrightarrow{|\Psi,V|} \Omega \xrightarrow{\neg} \Omega$$

Notation : Dans la suite on écrira $|\Psi,V| \wedge |\theta,V|$ plutôt que $\wedge \circ (|\Psi,V|. |\theta,V|)$, $\wedge$ désignant alors une opération **binaire** sur $\mathrm{Hom}(X^V , \Omega)$.
De même pour $\vee$, $\to$ et $\neg$ (opération unaire) .

- Si $\Phi = \bigvee x^{(i)} \, \Psi(x^{(i)})$ (resp. $\bigwedge x^{(i)} \, \Psi(x^{(i)})$) , soit $a^{(i)}$ une variable libre qui n'est pas dans V . Soit p_a la projection canonique : $X^{V \cup \{a\}} \xrightarrow{p_a} X^V$. Alors

$$|\Phi,V| = \bigvee_{Pa} (|\Psi(a^{(i)}) , V \cup \{a^{(i)}\}|) \quad (\text{resp } \bigwedge_{Pa} (|\Psi(a^{(i)}), V \cup \{a^{(i)}\}|$$

On remarque que si V et W sont des ensembles finis de variables tels que $W \supset V \supset \sigma(\Phi)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X^W \arrow[rr, "|\Phi,W|"] \arrow[dr] & & \Omega \\
& X^V \arrow[ur, swap, "|\Phi,V|"] &
\end{tikzcd}$$

commute .

Notation : $\mathrm{Val}(\Phi,V)$ désignera le sous objet (défini à isomorphisme près) de X^V de fonction caractéristique $|\Phi,V|$.

<u>Comparaison avec les sémantiques ordinaires</u>

La sémantique qui vient d'être définie est plus générale que la sémantique classique ; Une réalisation au sens classique de est une Ens-réalisation où les ensembles de base ne sont pas vides et $\mathrm{Val}(\Phi, \{a_1,\ldots,a_n\})$ n'est autre que $\{(a_1,\ldots,a_n) \mid \Phi(a_1,\ldots,a_n)\}$. Ce qui est plus intéressant , c'est qu'elle englobe aussi la sémantique de Kripke .

Présentation de la sémantique de Kripke (cf [3]) .
On se limite ici à un langage $\mathcal{L}$ sans symbole de fonction , sans égalité et avec un seul type . Une réalisation de Kripke de $\mathcal{L}$ est la donnée des éléments suivants :

- Un ensemble ordonné $(C , \leq)$. Ens^C désignera le topos des préfaisceaux sur C (considéré comme catégorie) à valeur dans Ens .

- Un préfaisceau P de Ens^C qui vérifie pour $p,q \in C$ $p \leq q \Rightarrow P(p) \subset P(q)$ et tel que pour tout p de C , $P(p) \neq \emptyset$. On notera $\hat{P}(p)$ l'ensemble des formules closes de $\mathcal{L}$ à paramètres dans $P(p)$.

- Une relation $\Vdash$ entre éléments de C et formules closes de $\mathcal{L}$ à paramètres dans $\bigcup_{p \in C} P(p)$ vérifiant :

o) Si $p \Vdash \Phi$, $\Phi \in \hat{P}(p)$ et $\forall q \geq p \quad q \Vdash \Phi$

1) $p \Vdash \Phi \wedge \Psi \iff p \Vdash \Phi$ et $p \Vdash \Psi$

2) $p \Vdash \Phi \vee \Psi \iff p \Vdash \Phi$ ou $p \Vdash \Psi$

3) $p \Vdash \neg\Phi \iff \neg\Phi \in \hat{P}(p)$ et $\forall q \geq p \quad q \nVdash \Phi$

4) $p \Vdash \Phi \to \Psi \iff (\Phi \to \Psi \in \hat{P}(p)$ et $\forall q \geq p \quad q \Vdash \Phi \Rightarrow q \Vdash \Psi)$

5) $p \Vdash \bigvee x \ \Phi(x) \iff \exists a \in P(p) \quad p \Vdash \Phi(a)$

6) $p \Vdash \bigwedge x \ \Phi(x) \iff \forall q \geq p \ \ \forall a \in P(q) \quad q \Vdash \Phi(a)$

A une réalisation de Kripke on associe canoniquement une Ens^C - réalisation de la manière suivante :

- L'objet de base est le préfaisceau P .
- Si r est un symbole relationnel n-aire de $\mathcal{L}$, $|r|$ sera la fonction caractéristique du sous-foncteur R de P^n défini par :
  $$R(p) = \{(a_1 ,\dots,a_n) \mid p \Vdash r(a_1 ,\dots, a_n)\}$$
  R est bien un préfaisceau vu la condition 0 .

Voici le théorème qui exprime que la sémantique de Kripke est un cas particulier de la sémantique introduite dans ce papier :

<u>Théorème</u>

Soit Φ une formule de $\mathcal{L}$ à n variables libres .
$Val(\Phi, \sigma(\Phi))$ calculé dans la Ens^C-réalisation associée à la

de Kripke est un sous-foncteur de P^n et on a
si $n \neq 0$

$$\forall\ a_1,\dots,a_n \in P(p) \quad (a_1,\dots,a_n) \in Val(\Phi,\sigma(\Phi))(p) \Leftrightarrow p \Vdash \Phi(a_1,\dots,a_n)$$

si $n = 0$

$$Val(\Phi,\emptyset)(p) = \{*\} \text{ (ensemble à un seul élément)} \Leftrightarrow p \Vdash \Phi$$

Ceci peut s'exprimer de façon plus agréable. Soit h^p le foncteur $Hom_C(p,.)$. h^p est un sous objet du préfaisceau final 1. Par Yoneda, à tout a de $P(p)$ on peut associer de façon bijective une flèche $h^p \to P$ que l'on notera encore a. Soit $\Phi(a_1,\dots,a_n)$ une formule de $\widehat{P}(p)$. On lui associe la flèche

$$|\Phi(a_1,\dots,a_n)|_p \ :\ h^p \xrightarrow{(a_1,\dots,a_n)} P^n \xrightarrow{|\Phi,\ \sigma(\Phi)|} \Omega$$

et si Φ est close sans paramètre

$$|\Phi|_p \ :\ h^p \rightarrowtail 1 \xrightarrow{|\Phi,\emptyset|} \Omega$$

Le théorème s'énonce alors

Pour toute formule Φ de $\widehat{P}(p)$, $p \Vdash \Phi \Leftrightarrow |\Phi|_p = v_{h^p}$

Le théorème se démontre par induction sur la complexité de la formule Φ en utilisant les propriétés logiques de Ens^C qu'il est bon de rappeler ici.

Tout d'abord, l'objet classifiant Ω et sa structure : On a $\Omega(p) \sim Hom(h^p, \Omega) \sim$ {sous foncteurs de h^p}. Un sous foncteur u de h^p est caractérisé par l'ensemble $D = \{q \in C \mid u(q) = \{*\}\}$; une partie D de C est associée à un sous foncteur de h^p si et seulement si

$$q \in D \Longrightarrow (q \geqslant p \quad \text{et} \quad \forall r \geqslant q \quad r \in D) .$$

Appelons parties saturées au-dessus de p les parties de C qui vérifient cette propriété. On peut poser

$$\Omega(p) = \{\text{parties saturées au-dessus de } p\}$$

avec comme morphismes de transition pour $q \geqslant p$

$$\begin{aligned} \Omega(p) &\longrightarrow \Omega(q) \\ D &\longmapsto D_{\restriction q} = \{r \in D \mid r \geqslant q\} \end{aligned}$$

La relation d'ordre sur Ω est représentée par le sous-objet $\subset \rightarrowtail \Omega \times \Omega$ avec $\subset(p) = \{(D,D') \mid D \subset D'\}$. La flèche $1 \xrightarrow{v} \Omega$ choisit pour chaque p l'ensemble $\{q \in C \mid q \geqslant p\}$ dans $\Omega(p)$. C'est la partie associée à h_p.

Soit X un objet de Ens^C, U un sous-objet de X. Si $x \in X(p)$ et si $q \geqslant p$, on notera $x_{\restriction q}$ l'image de x dans $X(q)$. La fonction caractéristique

$$\chi_U : X \longrightarrow \Omega$$

est donnée par $\chi_U(p) : x \longmapsto \{q \geqslant p \mid x_{\restriction q} \in U(q)\}$.

Le diagramme
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "\chi_U"] & \Omega \end{tikzcd}$$
est bien un produit fibré.

La structure d'algèbre de Heyting de Ω est donnée par

- La flèche $v : 1 \to \Omega$
- La flèche $f : 1 \to \Omega$ qui pour chaque p choisit $\emptyset$ dans $\Omega(p)$.
- La flèche $\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ avec

  α) $\wedge(p) : (D,D') \longmapsto D \cap D'$

- La flèche $\vee : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ avec

  β) $\vee(p) : (D,D') \longmapsto D \cup D'$

- La flèche $\to : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, fonction caractéristique de $\subset$

  γ) $\to(p) : (D,D') \longmapsto \{q \geqslant p \mid D_{\restriction q} \subset D'_{\restriction q}\}$

- La flèche $\neg : \Omega \longrightarrow \Omega$ qui vaut $\to \circ (1_\Omega \times f)$

  δ) $\neg(p) : D \longmapsto \{q \geqslant p \mid D_{\restriction q} = \emptyset\}$

Et maintenant , des propriétés que l'on pourra rapprocher des propriétés de la relation $\Vdash$ page 8 :

Soit X un objet de Ens^C , U et V deux sous objets de X .

1) $(U \wedge V)\ (p) = U(p) \cap V(p)$

2) $(U \vee V)\ (p) = U(p) \cup V(p)$

3) $(U \to V)(p) = \{x \in X(p) \mid \forall q \geqslant p \quad x_{\upharpoonright q} \notin U(q) \ \text{ ou } \ x_{\upharpoonright q} \in V(q)\}$

4) $(\neg U)\ (p) = \{x \in X(p) \mid \forall q \geqslant p \quad x_{\upharpoonright q} \notin U(q)\}$

Soit Y un autre objet de Ens^C , R un sous objet de $X \times Y$

Puisque $U \geqslant \bigvee_Y R \iff U \times Y \geqslant R$

5) $(\bigvee_Y R)\ (p) = \{x \in X(p) \mid \exists\, y \in Y(p) \quad (x,y) \in R(p)\}$

Puisque $\bigwedge_Y R \geqslant U \iff R \geqslant U \times Y$

6) $(\bigwedge_Y R)\ (p) = \{x \in X(p) \mid \forall q \geqslant p\ \forall y \in Y(q) \quad (x_{\upharpoonright q}, y) \in R(q)\}$

Théorie de la démonstration

Les règles de déduction

Les règles de déduction qui vont être énoncées sont directement copiées de celles du calcul séquentiel de Gentzen (cf [4]) . Les séquences utilisées sont du type $\Gamma \vdash \Delta^V$ où

- Γ et Δ sont des suites finies de formules de $\mathcal{L}$. On note $\{\Gamma\}$ l'ensemble des formules qui apparaissent dans la suite Γ .
- V est un ensemble fini de variables libres contenant les variables libres des formules de Γ et Δ .

Définition :

Une séquence $\Gamma \vdash \Delta^V$ sera valide pour une E-réalisation donnée si pour cette E-réalisation

$$\bigwedge_{\Phi \in \{\Gamma\}} |\Phi, V| \leqslant \bigvee_{\Psi \in \{\Delta\}} |\Psi, V| \quad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}(X^V, \Omega) .$$

(Si $\{\Gamma\} = \emptyset$, le terme de gauche est v_{X^V} , si $\{\Delta\} = \emptyset$ celui de droite est f_{X^V}) .

$\Gamma \vdash \Delta^V$ sera valide si pour tout topos E , $\Gamma \vdash \Delta^V$ est valide pour toute E-réalisation de $\mathcal{L}$.

Enfin $\Gamma \vdash \Delta^V$ sera valide classiquement si pour tout topos booléen E , $\Gamma \vdash \Delta^V$ est valide pour toute E-réalisation de $\mathcal{L}$.

Voici le système de déduction :

Axiomes $\quad \Phi \vdash \Phi^V \quad$ pour toute formule ϕ et tout V (fini , contenant $\sigma(\phi)$) .

Règle structurale $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta^V}{\Gamma' \vdash \Delta'^V} \quad$ pour $\{\Gamma\} \subset \{\Gamma'\}$, $\{\Delta\} \subset \{\Delta'\}$

Règles gauches

$$\frac{\Gamma , \Phi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \Phi \wedge \Psi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}} \qquad \frac{\Gamma , \Psi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \Phi \wedge \Psi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma , \Phi \vdash \Delta^{\mathbf{V}} \qquad \Gamma , \Psi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \Phi \vee \Psi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \neg \Phi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi^{\mathbf{V}} \qquad \Gamma , \Psi \vdash \Delta'^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \Phi \rightarrow \Psi \vdash \Delta , \Delta'^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma , \Phi(a^{(i)}) \vdash \Delta^{\mathbf{V} \cup \{a\}}}{\Gamma , \bigvee x^{(i)} \; \Phi(x^{(i)}) \vdash \Delta^{\mathbf{V}}} \quad a \notin \mathbf{V}$$

$$\frac{\Gamma , \Phi(t^{(i)}) \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \bigwedge x^{(i)} \; \Phi(x^{(i)}) \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}$$

Règles droites

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi^{\mathbf{V}} \qquad \Gamma \vdash \Delta , \Psi^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Delta , \Phi \wedge \Psi^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Delta , \Phi \vee \Psi^{\mathbf{V}}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta , \Psi^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Delta , \Phi \vee \Psi^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma , \Phi \vdash \Delta^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Delta , \neg \Phi^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma , \Phi \vdash \Delta , \Psi^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Delta , \Phi \rightarrow \Psi^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi(t^{(i)})^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Delta , \bigvee x^{(i)} \; \Phi(x^{(i)})^{\mathbf{V}}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi(a^{(i)})^{\mathbf{V} \cup \{a\}}}{\Gamma \vdash \Delta , \bigwedge x^{(i)} \; \Phi(x^{(i)})^{\mathbf{V}}} \quad a \notin \mathbf{V}$$

Règle de coupure $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta , \Phi^{\mathbf{V}} \qquad \Gamma' , \Phi \vdash \Delta'^{\mathbf{V}}}{\Gamma , \Gamma' \vdash \Delta , \Delta'^{\mathbf{V}}}$

Quand on ne considère que les topos booléens on utilise ce système tel quel , sans restriction . On notera TLK ce calcul séquentiel .

Par contre si l'on veut travailler dans n'importe quel topos , il faut apporter la restriction suivante :
Dans les règles droites pour $\neg$, $\rightarrow$, $\bigwedge$ les suites qui apparaissent à droite ont une longueur qui ne dépasse pas 1 . Elles peuvent donc s'écrire :

$$\frac{\Gamma , \Phi \vdash {}^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \neg \Phi^{\mathbf{V}}} \quad , \quad \frac{\Gamma , \Phi \vdash \Psi^{\mathbf{V}}}{\Gamma \vdash \Phi \rightarrow \Psi^{\mathbf{V}}} \quad , \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi(a^{(i)})^{\mathbf{V} \cup \{a\}}}{\Gamma \vdash \bigwedge x^{(i)} \; \Phi(x^{(i)})^{\mathbf{V}}} \quad a \notin \mathbf{V}$$

On notera T L J ce calcul séquentiel .

Si $\mathcal{L}$ est avec égalité il faut introduire des axiomes supplémentaires . Tout d'abord , quelques définitions :

Un maillon d'égalité $e(t,t')$ entre deux termes t et t' de même type est une suite finie de formules telle qu'il existe des termes u , $v_1^{(i_1)}$,..., $v_n^{(i_n)}$, $v_1'^{(i_1)}$,..., $v_n'^{(i_n)}$ avec $t = u(v_1,\ldots,v_n)$; $t' = u(v_1',\ldots, v_n')$ et que pour tout k , $1 \leq k \leq n$, ou bien $e(t,t')$ contient $v_k =_{i_k} v_k'$, ou bien il contient $v_k' =_{i_k} v_k$; $e(t,t')$ ne contient pas d'autre formule .

Une chaine d'égalité $E(t,t')$ entre deux termes de même type est une juxtaposition d'un nombre fini de maillons d'égalité $e(t,t_1)$, $e(t_1,t_2)$,..., $e(t_n,t')$.

Tout ceci sera plus clair si l'on remarque que ce qu'on a fait revient à décrire la plus petite relation d'équivalence contenant une relation donnée et compatible avec un certain nombre de fonctions .

Maintenant les axiomes pour l'égalité s'écrivent :

- $E(t^{(i)} , t'^{(i)}) \vdash t =_i t'^{\,V}$ pour toute chaine d'égalité et tout V (fini , contenant les variables libres qui apparaissent) .

A noter $\vdash t^{(i)} =_i t^{(i)\,V}$ comme cas particulier

- $E(t_1,t_1') ,\ldots, E(t_n,t_n') , r(t_1,\ldots,t_n) \vdash r(t_1',\ldots,t_n')^V$

pour tout symbole de relation r , toutes chaines d'égalité $E(t_K,t_K')$ et tout V .

T L K (resp T L J) muni de ces axiomes supplémentaires sera noté T L K E (resp T L J E) .

Quel est le mode d'emploi de ces calculs séquentiels ? Quelques exemples de démonstration le feront comprendre .

- Une démonstration de $\vdash (\neg \bigvee x\ rx) \to (\bigwedge y \neg ry)^{\emptyset}$ dans T L J (et donc dans T L K) :

$$\dfrac{\dfrac{r\,a \vdash r\,a^{\{a\}}}{r\,a \vdash \bigvee x\; r\,x^{\{a\}}}\ \text{axiome},\ \bigvee\text{-droite} \qquad \dfrac{\dfrac{\bigvee x\; r\,x \vdash \bigvee x\; r\,x^{\{a\}}}{\bigvee x\; r\,x\,,\ \neg\bigvee x\; r\,x \vdash^{\{a\}}}\ \text{axiome},\ \neg\text{ gauche}}{\bigvee x\; r\,x\,,\ \neg\bigvee x\; r\,x \vdash^{\{a\}}}\ \text{structurale}}{r\,a\,,\ \neg\bigvee x\; r\,x \vdash^{\{a\}}}\ \text{coupure}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r\,a\,,\ \neg\bigvee x\; r\,x \vdash^{\{a\}}}{\neg\bigvee x\; r\,x\,,\ r\,a \vdash^{\{a\}}}\ \text{structurale}}{\neg\bigvee x\; r\,x \vdash \neg r\,a^{\{a\}}}\ \neg\text{-droite}}{\neg\bigvee x\; r\,x \vdash \bigwedge y \neg r\,y^{\emptyset}}\ \bigwedge\text{-droite}}{\vdash (\neg\bigvee x\; r\,x) \to (\bigwedge y \neg r\,y)^{\emptyset}}\ \to\text{ droite}$$

On sautera souvent l'emploi d'une règle structurale dans une démonstration.

- Une démonstration de $\vdash \Phi \vee \neg \Phi^{\sigma(\Phi)}$ dans T L K qui n'en est pas une dans T L J

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Phi \vdash \Phi^{\sigma(\Phi)}}{\vdash \Phi,\ \neg\Phi^{\sigma(\Phi)}}\ \neg\text{-droite, pas valable dans T L J}}{\vdash \Phi\ ,\ \Phi \vee \neg\Phi^{\sigma(\Phi)}}\ \vee\text{-droite}}{\vdash \Phi \vee \neg\Phi^{\sigma(\Phi)}}\ \vee\text{-droite}$$

- Une démonstration de $\vdash \bigwedge x\; r\,x \to \bigvee x\; r\,x^{\{a\}}$ dans T L J (et dans T L K) qui ne peut pas se modifier en démonstration de $\vdash \bigwedge x\; r\,x \to \bigvee x\; r\,x^{\emptyset}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{r\,a \vdash r\,a^{\{a\}}}{\bigwedge x\; r\,x \vdash r\,a^{\{a\}}}\ \bigwedge\text{-gauche}}{\bigwedge x\; r\,x \vdash \bigvee x\; r\,x^{\{a\}}}\ \bigvee\text{-droite}}{\vdash \bigwedge x\; r\,x \to \bigvee x\; r\,x^{\{a\}}}\ \to\text{ droite}$$

Les calculs sont corrects

La première chose à vérifier , c'est le

Théorème

Cas $\mathcal{L}$ sans égalité .
Si $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est démontrable dans T L J (resp T L K) .
$\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est valide (resp valide classiquement) .

Cas $\mathcal{L}$ avec égalité .
Si $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est démontrable dans T L J E (resp T L K E)
$\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est valide (resp valide classiquement) .

On raisonne par induction sur la longueur de la démonstration . On note $|\Gamma , V|_g = \bigwedge_{\Phi \varepsilon \{\Gamma\}} |\Phi , V|$ et $|\Delta , V|_d = \bigvee_{\Psi \varepsilon \{\Delta\}} |\Psi , V|$:

D'abord , le cas des calculs T L J et T L J E :

1) $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est un axiome

- $\Phi \vdash \Phi^{V}$ est valide
- Si $\mathcal{L}$ est avec égalité $E(t^{(i)} , t'^{(i)}) \vdash t =_i t'^{V}$ et

  $E(t_1 , t_1') , \dots , E(t_n , t_n') , r(t_1, \dots, t_n) \vdash r(t_1', \dots, t_n')^{V}$

  sont valides . Il suffit de remarquer que

$$\vdash a^{(i)} =_i a^{(i)}\ V$$

$$a^{(i)} =_i b^{(i)} \vdash b^{(i)} =_i a^{(i)}\ V$$

$$a^{(i)} =_i b^{(i)} , b^{(i)} =_i c^{(i)} \vdash a^{(i)} = c^{(i)}\ V$$

$$a_1^{(i_1)} =_{i_1} b_1^{(i_1)} , \dots , a_n^{(i_n)} =_{i_n} b_n^{(i_n)} \vdash f(a_1, \dots, a_n) = f(b_1, \dots, b_n)^{V}$$

$$a_1^{(i_1)} =_{i_1} b_1^{(i_1)} , \dots , a_n^{(i_n)} =_{i_n} b_n^{(i_n)} , r(a_1, \dots, a_n) \vdash r(b_1, \dots, b_n)^{V}$$

  sont valides .

2) Si $\Gamma , \Phi \vdash \Delta^{V}$ est valide

$$|\Gamma , V|_g \wedge |\Phi , V| \leqslant |\Delta , V|_d \Rightarrow |\Gamma, V|_g \wedge |\Phi, V| \wedge |\Psi, V| \leqslant |\Delta, V|_d$$

et $\Gamma , \Phi \wedge \Psi \vdash \Delta^{V}$ est valide .

3) Si $\Gamma \vdash \Delta,\Phi^{V}$ et $\Gamma \vdash \Delta,\Psi^{V}$ sont valides

$$(|\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee |\Phi,V| \text{ et } |\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee |\Psi,V|) \Rightarrow |\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee (|\Phi,V| \wedge |\Psi,V|)$$

et $\Gamma \vdash \Delta,\Phi\wedge\Psi^{V}$ est valide .

4) Pour $\vee$ - gauche

5) Pour $\vee$ - droite

6) Si $\Gamma \vdash \Delta,\Phi^{V}$ est valide

$$|\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee |\Phi,V| \implies |\Gamma,V|_g \wedge \neg|\Phi,V| \leq |\Delta,V|_d$$

et $\Gamma ,\neg\Phi \vdash \Delta^{V}$ est valide .

7) Si $\Gamma,\Phi \vdash {}^{V}$ est valide

$$|\Gamma,V|_g \wedge |\Phi,V| \leq f_{X^{V}} \implies |\Gamma,V|_g \leq \neg|\Phi,V|$$

et $\Gamma \vdash \neg\Phi^{V}$ est valide .

8) Si $\Gamma \vdash \Delta,\Phi^{V}$ et $\Gamma,\Psi \vdash \Delta'^{V}$ sont valides

$$|\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee |\Phi,V| \text{ et } |\Gamma,V|_g \wedge |\Psi,V| \leq |\Delta',V|_d$$

$$\Rightarrow |\Gamma,V|_g \wedge (|\Phi,V| \to |\Psi,V|) \leq |\Gamma,V|_g \wedge (|\Delta,V|_d \vee |\Psi,V|)$$

$$\leq |\Delta,V|_d \vee |\Delta',V|_d$$

et $\Gamma,\Phi \to \Psi \vdash \Delta,\Delta'^{V}$ est valide .

9) Si $\Gamma,\Phi \vdash \Psi^{V}$ est valide

$$|\Gamma,V|_g \wedge |\Phi,V| \leq |\Psi,V| \implies |\Gamma,V|_g \leq |\Phi,V| \to |\Psi,V|$$

et $\Gamma \vdash \Phi \to \Psi^{V}$ est valide .

10) Si $\Gamma,\Phi(a^{(i)}) \vdash \Delta^{V\cup\{a\}}$ où $a \notin V$ et a ne figure ni dans Γ ni dans Δ est valide ,

$$(|\Gamma,V|_g \circ p_a) \wedge |\Phi(a),V\cup\{a\}| \leq (|\Delta,V|_d \circ p_a) \Rightarrow |\Phi(a),V\cup\{a\}| \leq (|\Gamma,V|_g \to |\Delta,V|_d) \circ p_a$$

$$|\forall x\ \Phi(x),V| \leq |\Gamma,V|_g \to |\Delta,V|_d$$

$$|\Gamma,V|_g \wedge (\forall x\ \Phi(x),V| \leq |\Delta,V|_d$$

et $\Gamma\ ,\ \bigvee x^{(i)}\ \Phi(x^{(i)}) \vdash \Delta^{V}$ est valide .

11) Si $\Gamma \vdash \Delta, \Phi(t^{(i)})^{V}$ est valide , soit $a^{(i)}$ une variable libre qui n'est pas dans V ; la projection canonique $p : X^{V} \longrightarrow X^{\sigma(\bigvee x\ \Phi(x))}$ et la flèche $|t,V| : X^{V} \longrightarrow X_i$ donnent une flèche

$$(p, |t,V|) : X^{V} \longrightarrow X^{\sigma(\Phi(a))}$$

et $|\Phi(t)\ ,\ V| = X^{V} \xrightarrow{(p,|t,V|)} X^{\sigma(\Phi(a))} \xrightarrow{|\Phi(a),\sigma(\Phi(a))|} \Omega$.

$|\Gamma,V|_g \leqslant |\Delta,V|_d \vee (|\Phi(a),\sigma(\Phi(a))| \circ (p,|t,V|))$ et $|\Phi(a),\sigma(\Phi(a))| \leqslant |\bigvee x \Phi(x),\sigma(\bigvee x \Phi(x))| \circ p_a$

entraînent $|\Gamma,V|_g \leqslant |\Delta,V|_d \vee (|\bigvee x\ \Phi(x)\ ,\ \sigma(\bigvee x\ \Phi(x))| \circ p)$ et ainsi

$\Gamma \vdash \Delta\ ,\ \bigvee x^{(i)}\ \Phi(x^{(i)})^{V}$ est valide .

12) Pour $\bigwedge$ gauche , se traite comme 11 .

13) Si $\Gamma \vdash \Phi(a^{(i)})^{V \cup \{a\}}$ où $a \notin V$ et a ne figure pas dans Γ est valide ,

$$|\Gamma,V|_g \circ p_a \leqslant |\Phi(a)\ ,\ V \cup \{a\}| \Longrightarrow |\Gamma,V|_g \leqslant |\bigwedge x\ \Phi(x)\ ,\ V|$$

et $\Gamma \vdash \bigwedge x^{(i)}\ \Phi(x^{(i)})^{V}$ est valide .

14) Si $\Gamma \vdash \Delta, \Phi^{V}$ et $\Gamma', \Phi \vdash \Delta'^{V}$ sont valides ,

$|\Gamma,V|_g \leqslant |\Delta,V|_d \vee |\Phi,V|$ et $|\Gamma',V|_g \wedge |\Phi,V| \leqslant |\Delta',V|_d$ entraînent

$$|\Gamma,V|_g \wedge |\Gamma',V|_g \leqslant (|\Delta,V|_d \vee |\Phi,V|) \wedge |\Gamma',V|_g \leqslant |\Delta,V|_d \vee |\Delta',V|_d$$

et $\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'^{V}$ est valide .

Maintenant , le cas des calculs T L K et T L K E . Il faut reprendre les étapes

7') Si $\Gamma,\Phi \vdash \Delta^{V}$ est valide classiquement , dans un topos booléen

$$|\Gamma,V|_g \wedge |\Phi,V| \leqslant |\Delta,V|_d \Longrightarrow |\Gamma,V|_g \wedge (|\Phi,V| \vee \neg|\Phi,V|) \leqslant |\Delta,V|_d \vee |\neg\Phi,V|$$

$$\Longrightarrow |\Gamma,V|_g \leqslant |\Delta,V| \vee |\neg\Phi,V|$$

et $\Gamma \vdash \Delta, \neg\Phi^V$ est valide classiquement .

9') Si $\Gamma, \Phi \vdash \Delta, \Psi^V$ est valide classiquement , dans tout topos booléen

$$|\Gamma,V|_g \wedge |\Phi,V| \leq |\Delta,V|_d \vee |\Psi,V| \Rightarrow |\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee |\Psi,V| \vee |\neg\Phi,V|$$
$$= |\Delta,V|_d \vee |\Phi \rightarrow \Psi,V|$$

et $\Gamma \vdash \Delta, \Phi \rightarrow \Psi^V$ est valide classiquement .

13') Si $\Gamma \vdash \Delta, \Phi(a^{(i)})^{V \cup \{a\}}$ où $a \notin V$ et a ne figure ni dans Γ ni dans Δ est valide classiquement , dans tout topos booléen

$$(|\Gamma,V|_g \circ p_a) \leq (|\Delta,V|_d \circ p_a) \vee |\Phi(a),V \cup \{a\}| \Rightarrow (|\Gamma,V|_g \wedge \neg|\Delta,V|_d) \circ p_a \leq |\Phi(a),V \cup \{$$
$$\Rightarrow |\Gamma,V|_g \wedge \neg|\Delta,V|_d \leq |\bigwedge x\Phi(x),V|$$
$$\Rightarrow |\Gamma,V|_g \leq |\Delta,V|_d \vee |\bigwedge x\Phi(x),V|$$

et $\Gamma \vdash \Delta , \bigwedge x^{(i)} \Phi(x^{(i)})^V$ est valide classiquement .

Les calculs sont complets

Il faut maintenant s'assurer que toute séquence valide est démontrable (dans le calcul approprié) . On va suivre la démonstration de complétude que l'on peut trouver dans [3] .

On ne considèrera qu'un langage $\mathcal{L}$ à un seul type , ce qui rend les choses plus faciles à dire sans pour cela enlever quelque chose d'essentiel . D'abord , quelques définitions :

Définition :

Une formule signée de $\mathcal{L}$ est une expression de la forme $T\Phi$ ou $F\Phi$ où Φ est une formule de $\mathcal{L}$. T ou F sera la signature de la formule.

Soit $S = \{T\Phi_1 ,\ldots, T\Phi_m , F\Psi_1 ,\ldots, F\Psi_n\}$ un ensemble fini de formules signées . On pose $||S|| = \Phi_1 ,\ldots, \Phi_m \vdash \Psi_1 ,\ldots, \Psi_n$

$||S||$ n'est défini qu'à l'ordre des suites de formules près , mais cela importe peu grâce à la règle structurale .

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble (fini ou infini) de formules signées, $\mathcal{V}$ un ensemble (fini ou infini) de variables libres contenant toutes les variables libres des formules de $\mathcal{L}$.

Définition :

$\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-consistant si pour toute partie finie S de $\mathcal{S}$ et toute partie finie V de $\mathcal{V}$ contenant les variables libres des formules de S , $||S||^V$ n'est pas démontrable dans T L J (T L J E si $\mathcal{L}$ est avec égalité) .

$\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-satisfaisable si pour toute partie finie S de $\mathcal{S}$ et toute partie finie V de $\mathcal{V}$ contenant les variables libres des formules de S , $||S||^V$ n'est pas valide .

Remarque : Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ alors $\mathcal{S}'$ est $\mathcal{V}'$-consistant (resp. $\mathcal{V}'$-satisfaisable) entraîne $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-consistant (resp. $\mathcal{V}$-satisfaisable)

Le fait que les calculs sont corrects s'exprime par la

Proposition Si $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-satisfaisable , $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-consistant.

La complétude , par la réciproque :

Théorème Si $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-consistant , $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-satisfaisable .

Démonstration du théorème de complétude

La démonstration fait appel aux collections de Hintikka . Une collection de Hintikka est une collection ordonnée (C , $\leqslant$) d'ensembles p de formules signées de $\mathcal{L}$, munie d'une application $p \longmapsto \mathcal{V}(p)$ à valeur dans les ensembles de variables libres de $\mathcal{L}$. On note $\mathcal{T}\mathcal{V}(p)$ l'ensemble des termes de $\mathcal{L}$ construits avec les variables de $\mathcal{V}(p)$.
C et $\mathcal{V}$ doivent vérifier les conditions suivantes :

1) Pour tout p $\mathcal{V}(p)$ contient les variables libres des formules de p et p est $\mathcal{V}(p)$-consistant .
2) $p \leqslant q \implies \mathcal{V}(p) \subset \mathcal{V}(q)$
3) $p \leqslant q \implies (T\,\Phi \in p \Rightarrow T\,\Phi \in q)$

4) $T\Phi \wedge \Psi \varepsilon p \Rightarrow T\Phi\varepsilon p$ et $T\Psi\varepsilon p$

5) $F\Phi \wedge \Psi\varepsilon p \Rightarrow F\Phi\varepsilon p$ ou $F\Psi\varepsilon p$

6) $T\Phi \vee \Psi\varepsilon p \Rightarrow T\Phi\varepsilon p$ ou $T\Psi\varepsilon p$

7) $F\Phi \vee \Psi\varepsilon p \Rightarrow F\Phi\varepsilon p$ et $F\Psi\varepsilon p$

8) $T\neg\Phi\varepsilon p \Rightarrow F\Phi\varepsilon p$

9) $F\neg\Phi\varepsilon p \Rightarrow \exists q \geq p \quad T\Phi\varepsilon q$

10) $T\Phi\to\Psi\varepsilon p \Rightarrow F\Phi\varepsilon p$ ou $T\Psi\varepsilon p$

11) $F\Phi\to\Psi\varepsilon p \Rightarrow \exists\, q \geq p \quad T\Phi\varepsilon q$ et $F\Psi\varepsilon q$

12) $T\forall x\Phi(x)\varepsilon p \Rightarrow \exists a\varepsilon \mathcal{V}(p)\ T\Phi(a)\varepsilon p$

13) $F\forall x\Phi(x)\varepsilon p \Rightarrow \forall t\varepsilon \mathcal{C}\mathcal{V}(p)\ F\Phi(t)\varepsilon p$

14) $T\Lambda x\Phi(x)\varepsilon p \Rightarrow \forall t\varepsilon \mathcal{C}\mathcal{V}(p)\ T\Phi(t)\varepsilon p$

15) $F\Lambda x\Phi(x)\varepsilon p \Rightarrow \exists q\geq p\ \exists a\varepsilon \mathcal{V}(q)\ F\Phi(a)\varepsilon q$.

L'intérêt des collections de Hintikka est la propriété suivante :

<u>Lemme 1</u>

‖Tout p de C est $\mathcal{V}(p)$-satisfaisable .

Le théorème est alors une conséquence immédiate du

<u>Lemme 2</u>

‖Si $\mathcal{S}_o$ est $\mathcal{V}_o$-consistant , il existe une collection de Hintikka
‖$(C\ ,\ \leq\ ,\ \mathcal{V})$ et un $p\ \varepsilon\ C$ tel que $\mathcal{S}_o \subset p$ et $\mathcal{V}_o \subset \mathcal{V}(p)$.

<u>Démonstration du lemme 1</u>, d'abord dans le cas où $\mathcal{L}$ est sans égalité .

On considère la Ens^C-réalisation de $\mathcal{L}$ suivante :

- Le préfaisceau de base est $\mathcal{C}\mathcal{V}$ (On a $\mathcal{C}\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{C}\mathcal{V}(q)$ pour $p \leq q$) .
- Si f est un symbole de fonction n-aire , $|f|$ est défini par

$$|f|(p)\ :\ \mathcal{C}\mathcal{V}(p)^n \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{V}(p)$$
$$(t_1,\dots,t_n) \longmapsto f(t_1,\dots,t_n)$$

- Si r est un symbole de relation n-aire , $|r|$ est la fonction caractéristique du sous foncteur R de $\mathcal{C}\mathcal{V}^n$ défini par $R(p) = \{(t_1,\dots,t_n)\ \varepsilon\ \mathcal{C}\mathcal{V}(p)^n \mid Tr(t_1,\dots,t_n)\ \varepsilon\ p\}$.

Soit Φ une formule dont toutes les variables libres sont dans $\mathcal{V}(p)$. A toute variable de $\mathcal{V}(p)$ (et plus généralement à tout terme de $\mathcal{C}\mathcal{V}(p)$) on associe de façon bijective par Yoneda une flèche $h^p \longrightarrow \mathcal{C}\mathcal{V}$ que l'on désignera par la même lettre. Ainsi comme à la page 9 , on associe à Φ la flèche

$$|\Phi|_p \; : \; h^p \longrightarrow \mathcal{V}^{\sigma(\Phi)} \xrightarrow{\;|\Phi,\sigma(\Phi)|\;} \Omega$$

On remarque que si on remplace $\sigma(\Phi)$ par un ensemble V plus grand, la flèche $|\Phi|_p$ reste toujours la même.

On écrira $p \Vdash \Phi$ pour $|\Phi|_p = V_{h^p}$.

On notera $\equiv$ la correspondance entre flèches de h_p dans Ω et éléments de $\Omega(p)$. On a $|\Phi|_p \equiv \{q > p \mid q \Vdash \Phi\}$.

<u>Sous-lemme 1</u>

$$\left\| \begin{array}{l} T\,\Phi \in p \implies p \Vdash \Phi \\ F\,\Phi \in p \implies p \nVdash \Phi \end{array} \right.$$

La démonstration se fait par induction sur la complexité de Φ en utilisant les propriétés logiques de Ens^C des pages 10 et 11.

- Si $\Phi = r(t_1,\dots,t_n)$ est atomique, on a $|\Phi|_p = h^p \xrightarrow{(t_1,\dots,t_n)} \mathcal{V}^n \xrightarrow{|r|}$

En effet si t a pour variables libres $a_1,\dots,a_m$ le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{V}^m \arrow[r, "{|t,\{a_1,\dots,a_m\}|}"] & \mathcal{V} \\ h^p \arrow[ur, "{(a_1,\dots,a_m)}"] \arrow[urr, "t"'] & & \end{tikzcd}$$

commute.

1) $T\,\Phi \in p$. $(t_1,\dots,t_n) \in R(p)$ et $p \Vdash \Phi$.

2) $F\,\Phi \in p$. Si $p \Vdash \Phi$, cela veut dire que $(t_1,\dots,t_n) \in R(p)$ et donc que $T\,\Phi \in p$. Mais si $p \supset \{T\Phi , F\Phi\}$, p n'est pas $\mathcal{V}$(p)-consistant . Finalement $p \nVdash \Phi$.

- Si $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ $\quad |\Phi|_p = |\Phi_1|_p \wedge |\Phi_2|_p$. On utilise la propriété α .

3) $T\,\Phi \in p$. Alors $T\,\Phi_1 \in p$ et $T\,\Phi_2 \in p$, d'où $p \Vdash \Phi_1$ et $p \Vdash \Phi_2$, ce qui entraîne $p \Vdash \Phi$.

4) $F\,\Phi \in p$. Alors par exemple $F\,\Phi_1 \in p$ donc $p \nVdash \Phi_1$ et $p \nVdash \Phi$

- Si $\Phi = \Phi_1 \;\; \Phi_2$ $\quad |\Phi|_p = |\Phi_1|_p \vee |\Phi_2|_p$. On utilise la propriété β .

5) $T\,\Phi \,\varepsilon\, p$. Alors par exemple $T\,\Phi_1 \,\varepsilon\, p$ donc $p \Vdash \Phi_1$ et $p \Vdash \Phi$

6) $F\,\Phi \,\varepsilon\, p$. Alors $F\,\Phi_1 \,\varepsilon\, p$ et $F\,\Phi_2 \,\varepsilon\, p$, d'où $p \nVdash \Phi_1$ et $p \nVdash \Phi_2$, ce qui entraîne $p \nVdash \Phi$.

- Si $\Phi = \neg\,\Psi$, $|\Phi|_p = \neg\,|\Psi|_p$. On utilise la propriété δ .

7) $T\,\Phi \,\varepsilon\, p \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; T\,\Phi \,\varepsilon\, q \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; F\,\Psi \,\varepsilon\, q \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; q \nVdash \Psi$
$\Rightarrow |\Psi|_p \equiv \emptyset \Rightarrow p \Vdash \Phi$.

8) $F\,\Phi \,\varepsilon\, p \Rightarrow \exists q \geqslant p \;\; T\,\Psi \,\varepsilon\, q \Rightarrow \exists q \geqslant p \;\; q \Vdash \Psi \Rightarrow |\Psi|_p \neq \emptyset$
$\Rightarrow p \nVdash \Phi$.

- Si $\Phi = \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$, $|\Phi|_p = |\Phi_1|_p \rightarrow |\Phi_2|_p$. On utilise la propriété γ .

9) $T\,\Phi \,\varepsilon\, p \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; T\,\Phi \,\varepsilon\, q \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; F\Phi_1 \varepsilon q$ ou $T\Phi_2 \varepsilon q \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; q \nVdash \Phi_1$ ou $q \Vdash \Phi_2$
$\Rightarrow p \Vdash \Phi$.

10) $F\,\Phi \,\varepsilon\, p \Rightarrow \exists q \geqslant p \;\; T\,\Phi_1 \,\varepsilon\, q$ et $F\,\Phi_2 \varepsilon\, q \Rightarrow \exists q \geqslant p \;\; q \Vdash \Phi_1$ et $q \nVdash \Phi_2$
$\Rightarrow p \nVdash \Phi$.

Si $\Phi = \bigvee x \;\Psi(x)$

11) $T\,\Phi \,\varepsilon\, p \Rightarrow \exists a \,\varepsilon\, \mathcal{V}(p) \;\; T\,\Psi(a) \,\varepsilon\, p \Rightarrow p \Vdash \Psi(a)$. Comme $|\Psi(a)|_p < |\Phi|_p$ on a $p \Vdash \Phi$.

12) $F\,\Phi \,\varepsilon\, p$. On utilise la propriété 5 page 12 .
$\forall t \,\varepsilon\, \mathcal{CV}(p) \;\; F\,\Psi(t) \,\varepsilon\, p \Rightarrow \forall t \,\varepsilon\, \mathcal{CV}(p) \;\; p \nVdash \Psi(t)$. Donc , si Φ a n variables libres $a_1,\ldots,a_n$ $\quad \mathrm{Val}(\Psi, \mathcal{CV}^{n+1})(p) \cap \{(a_1,\ldots,a_n)\} \times \mathcal{CV} = \emptyset$ et ainsi $\mathrm{Val}(\Phi, \mathcal{CV}^{n})(p) \cap \{(a_1,\ldots,a_n)\} = \emptyset$ ce qui entraîne $p \nVdash \Phi$.

Si $\Phi = \bigwedge x \;\Psi(x)$

13) $T\,\Phi \,\varepsilon\, p \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; T\,\Phi \,\varepsilon\, q \Rightarrow \forall q \geqslant p \;\; \forall t \,\varepsilon\, \mathcal{CV}(q) \;\; q \Vdash \Psi(t)$.

Si Φ a n variables libres $a_1,\ldots,a_n$ on a $\mathrm{Val}(\Psi,\mathcal{C}\mathcal{V}^{n+1})(p) \supset \{(a_1,\ldots,a_n)\} \times \mathcal{C}\mathcal{V}$ et ainsi $\mathrm{Val}(\Phi,\mathcal{C}\mathcal{V}^{n})(p) \supset \{(a_1,\ldots,a_n)\}$ ce qui entraîne $p \Vdash \Phi$.

14) $F\ \Phi\ \varepsilon\ p \Rightarrow \exists q \geqslant p\ \exists a\ \varepsilon\ \mathcal{V}(q)\ \ F\ \Psi(a)\ \varepsilon\ q \Rightarrow \exists q \geqslant p\ \exists a\ \varepsilon\ \mathcal{V}(q)\ \ q \nVdash \Psi(a)$.

Comme $|\Psi(a)|_p \geqslant |\Phi|_p$, $q \nVdash \Psi(a) \Rightarrow q \nVdash \Phi \Rightarrow p \nVdash \Phi$.

Fin de la démonstration du sous-lemme 1 .

Soit maintenant S une partie finie de p et V une partie finie de $\mathcal{V}(p)$ contenant les variables libres des formules de S . D'après le sous-lemme 1 : $T\ \Phi\ \varepsilon\ S \Rightarrow p \Vdash \Phi \qquad F\ \Psi\ \varepsilon\ S \Rightarrow p \nVdash \Psi$

Ainsi $\bigwedge_{T\Phi \varepsilon S} |\Phi|_p > \bigvee_{F\Psi\varepsilon S} |\Psi|_p$, ce qui montre que $||S||^V$ n'est pas valide : p est bien $\mathcal{V}(p)$-satisfaisable .

Il reste à examiner le cas où $\mathcal{L}$ est avec égalité . Dans la Ens^C-réalisation de $\mathcal{L}$ considérée plus haut , l'interprétation de l'égalité (fonction caractéristique de $\Delta \rightarrowtail \mathcal{C}\mathcal{V} \times \mathcal{C}\mathcal{V}$ défini par $(t,t')\ \varepsilon\ \Delta(p) \Leftrightarrow T\ t{=}t'\ \varepsilon\ p$) n'est pas l'égalité standard . Soit $\sim\ \rightarrowtail \mathcal{C}\mathcal{V} \times \mathcal{C}\mathcal{V}$ la plus petite relation d'équivalence contenant Δ et stable par les symboles de fonction :
$(t_1,t'_1)\ ,\ldots,\ (t_n,t'_n)\ \varepsilon \sim(p) \Rightarrow (f(t_1,\ldots,t_n),\ f(t'_1,\ldots,t'_n))\ \varepsilon \sim(p)$.

On remarque (cf page 14) que $(t,t')\ \varepsilon \sim(p)$ si et seulement si il existe une chaîne d'égalité $E(t,t')$ telle que $\forall\ \Phi\ \varepsilon\ \{E(t,t')\}\ \ T\ \Phi\ \varepsilon\ p$.

On considère alors la nouvelle Ens^C-réalisation de $\mathcal{L}$:

- Le préfaisceau de base est $P = \mathcal{C}\mathcal{V}/\sim$.
- L'interprétation d'un symbole de fonction se déduit de l'interprétation dans $\mathcal{C}\mathcal{V}$ par passage au quotient (grâce à la stabilité).
- L'interprétation d'un symbole de relation est l'image par quotient de l'interprétation dans $\mathcal{C}\mathcal{V}$.

A une flèche de h^p dans P ne correspond plus maintenant un seul terme de $\mathcal{C}\mathcal{V}(p)$, mais une classe de termes de $\mathcal{C}\mathcal{V}(p)$ pour $\sim(p)$. Ceci précisé , on démontre pour cette nouvelle Ens^C-réalisation le sous-lemme 1 comme précédemment . Le seul pas qui nécessite une nouvelle vérification est celui où Φ est atomique et $F\ \Phi\ \varepsilon\ p$:

- Si Φ est $r(t_1,\dots,t_n)$ et si $p \not\Vdash \Phi$ cela veut dire qu'il existe des chaînes d'égalité $E(t_1,t'_1)$,..., $E(t_n,t'_n)$ avec
$\forall K\ \forall \Psi \in \{E(t_K,t'_K)\}\ \ T\Psi \in p$ et $Tr(t'_1,\dots,t'_n) \in p$.

Mais puisque $E(t_1,t'_1),\dots,E(t_n,t'_n),r(t'_1,\dots,t'_n) \vdash r(t_1,\dots,t_n)^V$ est un axiome , si $Fr(t_1,\dots,t_n) \in p$ p n'est pas $\mathcal{V}(p)$-consistant .

- Si Φ est $t = t'$ et si $p \not\Vdash \Phi$, c'est qu'il existe une chaîne d'égalité $E(t,t')$ avec $\forall \Psi \in \{E(t,t')\}$ $T\Psi \in p$. Puisque $E(t,t') \vdash t = t'^V$ est un axiome , si $F\, t = t' \in p$ p n'est pas $\mathcal{V}(p)$-consistant .

Dans les deux cas , $F\Phi \in p \implies p \not\Vdash \Phi$.

Une fois le sous-lemme 1 démontré , on conclut comme précedemment .

Fin de la démonstration du lemme 1 .

Démonstration du lemme 2.

Pour plonger un $\mathcal{S}_o$ $\mathcal{V}_o$-consistant dans une collection de Hintikka , on procède en deux étapes .

Définition :

Un élément de Hintikka est un couple $(p , \mathcal{V}_p)$ où p est un ensemble de formules signées de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{V}_p$ un ensemble de variables libres contenant toutes les variables libres des formules de p tel que p est $\mathcal{V}_p$-consistant et que les conditions $4(T\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $5(F\Phi_1 \wedge \Phi_2)$, $6(T\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $7(F\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $8(T \neg \Phi)$, $10(T\Phi_1 \to \Phi_2)$, $12(T \bigvee x\ \Phi(x))$, $13(F \bigvee x\ \Phi(x))$, $14(T \bigwedge x\ \Phi(x))$ des collections de Hintikka sont vérifiées .

Sous-lemme 2

Si $\mathcal{S}_o$ est $\mathcal{V}_o$-consistant , il existe un élément de Hintikka $(p , \mathcal{V}_p)$ tel que $\mathcal{S}_o \subset p$ et $\mathcal{V}_o \subset \mathcal{V}_p$.

On suppose que l'on dispose d'une suite a_o , a_1 , a_2 ,... de variables libres qui ne sont pas dans $\mathcal{V}_o$.

On va raisonner sur les sous-formules des formules de $\mathcal{S}_o$.

"Etre sous-formule de" est la plus petite relation réflexive et transitive contenant la relation $\prec$ définie par :

1) Si $\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$, $\Phi_1 \vee \Phi_2$, $\Phi_1 \to \Phi_2$ alors $\Phi_1 \prec \Phi$ et $\Phi_2 \prec \Phi$.

2) Si $\Phi = \neg \Psi$ alors $\Psi \prec \Phi$.

3) Si $\Phi = \bigvee x\ \Psi(x)$, $\bigwedge x\ \Psi(x)$ pour tout terme t de $\mathcal{L}$ $\Psi(t) \prec \phi$.

L'ensemble des sous formules des formules de $\mathcal{S}_o$ est dénombrable . Supposons le totalement énuméré : Φ_o , Φ_1 , Φ_2 ,...

On construit une suite $(\mathcal{S}_o , \mathcal{V}_o)$, $(\mathcal{S}_1 , \mathcal{V}_1)$, $(\mathcal{S}_2 , \mathcal{V}_2)$,... avec $\mathcal{S}_o \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \ldots$ et $\mathcal{V}_o \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \ldots$ et pour tout n $\mathcal{S}_n$ $\mathcal{V}_n$-consistant . Supposons $(\mathcal{S}_n , \mathcal{V}_n)$ connu . Posons
$\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_n^o$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_n^o$.

On construit alors une suite finie $(\mathcal{S}_n^o , \mathcal{V}_n^o)$, $(\mathcal{S}_n^1 , \mathcal{V}_n^1)$,..., $(\mathcal{S}_n^{n+1} , \mathcal{V}_n^{n+1}) = (\mathcal{S}_{n+1} , \mathcal{V}_{n+1})$ avec $\mathcal{S}_n^o \subset \mathcal{S}_n^1 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_n^{n+1}$ et $\mathcal{V}_n^o \subset \mathcal{V}_n^1 \subset \ldots \subset \mathcal{V}_n^{n+1}$ et pour tout K $\mathcal{S}_n^K$ $\mathcal{V}_n^K$-consistant .

Supposons $(\mathcal{S}_n^K , \mathcal{V}_n^K)$ connu . Puisque $\mathcal{S}_n^K$ est $\mathcal{V}_n^K$-consistant trois possibilités qui s'excluent l'une l'autre peuvent se présenter :

1) $\mathcal{S}_n^K$ ne contient ni $T\Phi_K$, ni $F\Phi_K$. Alors $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

2) $\mathcal{S}_n^K$ contient $T\Phi_K$

a) $\Phi_K = \Psi \wedge \Theta$ $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi , T\Theta\}$ est $\mathcal{V}_n^K$-consistant : Sinon on aurait un $||S||^V$ démontrable avec $S \subset \mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi , T\Theta\}$ et $V \subset \mathcal{V}_n^K$. On peut supposer que S contient $T\psi$ et $T\Theta$. Mais si $\Gamma,\Psi,\Theta \vdash \Delta^V$ est démontrable (dans T L J ou T L J E) , $\Gamma,\Psi \wedge \Theta \vdash \Delta^V$ l'est aussi et $\mathcal{S}_n^K$ ne serait pas $\mathcal{V}_n^K$-consistant .

On pose $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi , T\Theta\}$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

b) $\Phi_K = \Psi \vee \Theta$ $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi\}$ ou $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Theta\}$ est $\mathcal{V}_n^K$ consistant :

Si $\Gamma, \Psi \vdash \Delta^V$ et $\Gamma, \Theta \vdash \Delta^V$ sont démontrables , $\Gamma, \Psi \vee \Theta \vdash \Delta^V$ l'est aussi . Si par exemple $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi\}$ est $\mathcal{V}_n^K$-consistant , on pose $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi\}$

$\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

c) $\Phi_K = \neg \Psi$ $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{F\Psi\}$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

d) $\Phi_K = \Psi \rightarrow \Theta$ $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{F\Theta\}$ ou $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi\}$ suivant le cas ,

$\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

e) $\Phi_K = \bigvee x \ \Psi(x)$ Soit a_{i_K} la première variable de la suite qui n'est pas dans $\mathcal{V}_n^K$. Alors $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi(a_{i_K})\}$ est $\mathcal{V}_n^K \cup (a_{i_k})$-consistant : Si $\Gamma, \Psi(a_{i_k}) \vdash \Delta^{V \cup \{a_{i_k}\}}$ avec $V \subset \mathcal{V}_n^K$,

$\Theta \in \{\Gamma\} \Rightarrow T\,\Theta \in \mathcal{S}_n^K$, $\Theta \in \{\Delta\} \Rightarrow F\,\Theta \in \mathcal{S}_n^K$ est démontrable , $\Gamma , \bigvee x \ \Psi(x) \vdash \Delta^V$ l'est aussi .

On pose $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi(a_{i_k})\}$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K \cup \{a_{i_k}\}$

f) $\Phi_K = \bigwedge x \ \Psi(x)$ $\mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi(t) \mid t \in \mathcal{T}\mathcal{V}_n^K\}$ est $\mathcal{V}_n^K$-consistant : Si $\Gamma, \Psi(t_1) , \dots , \Psi(t_n) \vdash \Delta^V$ est démontrable , $\Gamma, \bigwedge x \Psi(x) \vdash \Delta^V$ l'est aussi . On pose $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{T\Psi(t) \mid t \in \mathcal{T}\mathcal{V}_n^K\}$,

$\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

3) $\mathcal{S}_n^K$ contient $F\Phi_K$.

g) $\Phi_K = \Psi \wedge \Theta$ $\mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{F\Psi\}$ ou $\mathcal{S}_n^K \cup \{F\Theta\}$ suivant le cas ,

$\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$

h) $\Phi_K = \Psi \vee \Theta$ $\quad \mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \{F\Psi , F\Theta\}$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

i) $\Phi_K = \neg \Psi$ $\quad \mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

j) $\Phi_K = \Psi \to \Phi$ $\quad \mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

k) $\Phi_K = \bigvee x\ \Psi(x)$ $\quad \mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K \cup \{F\Psi(t) \mid t \in \mathcal{T}\mathcal{V}_n^K\}$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

ℓ) $\Phi_K = \bigwedge x\ \Psi(x)$ $\quad \mathcal{S}_n^{K+1} = \mathcal{S}_n^K$, $\mathcal{V}_n^{K+1} = \mathcal{V}_n^K$.

Soit $p = \cup \mathcal{S}_n$, $\mathcal{V}_p = \cup \mathcal{V}_n$. De par sa construction $(p , \mathcal{V}_p)$ est un élément de Hintikka et on a $p \supset \mathcal{S}_o$, $\mathcal{V}_p \supset \mathcal{V}_o$.

Fin de la démonstration du sous lemme 2 .

Voici maintenant la deuxième étape :

Sous-lemme 3

Si $(p , \mathcal{V}_p)$ est un élément de Hintikka , il existe une collection de Hintikka $(C, \leqslant, \mathcal{V})$ telle que $p \in C$ et $\mathcal{V}_p = \mathcal{V}(p$

On suppose ici que l'on dispose d'une double suite de variables libres qui ne sont pas dans $\mathcal{V}_p$:

$$\begin{array}{cccc} a_1^1 , & a_2^1 , & a_3^1 , & \dots \\ a_1^2 , & a_2^2 , & a_3^2 , & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

On suppose aussi que l'ensemble des sous-formules des formules de p est totalement énuméré .

On appelle F-formule une formule signée F d'une des trois formes $F \neg \Phi$, $F\ \Phi \to \Psi$, $F \bigwedge x\ \Phi(x)$.

Si $\mathcal{S}$ est un ensemble de formules signées , on note $\mathcal{S}_T$ l'ensemble des formules de $\mathcal{L}$ signées T .

On construit la collection de Hintikka petit à petit :

Etape 0 : On pose $p = p_1$, $\mathcal{V}_p = \mathcal{V}(p_1)$

Etape 1 : Si p_1 ne contient aucune F-formule , on pose

$$p_1' = p_1 \quad , \mathcal{V}_{p_1'} = \mathcal{V}(p_1) \ .$$

Sinon , on considère la première F-formule de p_1 .

- Si c'est $F \neg \Phi$, $p_{1_T} \cup \{T\Phi\}$ est $\mathcal{V}(p_1)$-consistant : Si $F,\Phi \vdash^V$ est démontrable , $\Gamma \vdash \neg \Phi^V$ l'est aussi . On pose
$p_1' = p_{1_T} \cup \{T\Phi\}$, $\mathcal{V}_{p_1'} = \mathcal{V}(p_1)$.

- Si c'est $F\Phi \rightarrow \Psi$, on pose $p_1' = p_{1_T} \cup \{T\Phi \ , F\Phi\}$, $\mathcal{V}_{p_1'} = \mathcal{V}(p_1)$.

- Si c'est $F \bigwedge x \ \Phi(x)$, $p_{1_T} \cup \{F\Phi(a_1^1)\}$ est $(p_1) \cup \{a_1^1\}$-consistant : Si $\Gamma \vdash \Phi(a_1^1)^{V \cup \{a_1^1\}}$ où $V \subset \mathcal{V}(p_1)$ et $\Phi \in \{\Gamma\} \Rightarrow T\Phi \in p_1$ est démontrable , $\Gamma \vdash \bigwedge x \ \Phi(x)^V$ l'est aussi . On pose
$p_1' = p_{1_T} \cup \{F\Phi(a_1^1)\}$, $\mathcal{V}_{p_1'} = \mathcal{V}(p_1)$.

Dans tous les cas on étend $(p_1' , \mathcal{V}_{p_1'})$ en un élément de Hintikka $(p_2 , \mathcal{V}(p_2))$ au moyen des variables de la suite a_1^1 , a_2^1 , ... qui ne sont pas dans $\mathcal{V}_{p_1'}$ et on pose $p_1 \leqslant p_2$. On dit que la première F-formule p_1 (si elle existe) a été utilisée .

Supposons qu'à l'étape n on ait construit une suite $(p_1 , \mathcal{V}(p_1))$, $(p_2 , \mathcal{V}(p_2))$,..., $(p_{2^n} , \mathcal{V}(p_{2^n}))$ d'éléments de Hintikka avec $p_K \leqslant p_{2^\ell+k}$, $\mathcal{V}(p_K) \subset \mathcal{V}(p_{2^\ell+K})$ pour $2^\ell \geqslant K$.

Etape n+1 : Pour chaque k tel que $1 \leqslant k \leqslant 2^n$ on considère la première F-formule de p_K non utilisée (si elle existe) et on procède comme dans l'étape 1 pour construire un nouvel élément de Hintikka $(p_{2^n+K} , \mathcal{V}(p_{2^n+K}))$. On pose $p_K \leqslant p_{2^n+K}$ et on dit que la F-formule considérée est utilisée .

Soit C la collection de tous les p_n ainsi obtenus . L'ordre sur C est le plus petit ordre contenant $\leqslant$; on le note encore $\leqslant$. De par sa construction , $(C, \leqslant, \mathcal{V})$ est une collection de Hintikka .

Fin de la démonstration du sous-lemme 3, du lemme 2 et du théorème .

On a bien entendu un théorème de complétude aussi pour les calculs T L K et T L K E . La démonstration utilise la même démarche que la démonstration ci-dessus mais elle est beaucoup plus simple car elle se passe "à plat" , tous les contre-modèles étant construits dans Ens .

Le " Hauptsatz "

On peut remarquer dans la démonstration du théorème de complétude que la règle de coupure n'intervient jamais . Si on remplace "démontrable" par "démontrable sans coupure" , on aboutit au même résultat : Une séquence $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ qui n'est pas démontrable dans T L J ou T L J E (resp. T L K ou T L K E) sans coupure n'est pas valide (resp. valide classiquement) . Ceci montre l'analogue du Hauptsatz de Gentzen [4] :

Théorème

Si $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est démontrable dans T L J (resp. T L J E , T L K , T L K E) $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est démontrable dans le même calcul sans coupure

Corollaire

Si $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est démontrable dans T L J (resp. T L J E , T L K , T L K E) il existe une démonstration de $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ dans ce même calcul où toutes les formules qui figurent sont des sous formules des formules de Γ et Δ et toutes les règles employées concernent des opérateurs logiques qui apparaissent dans les formules de Γ et Δ .

Le corollaire découle immédiatement du théorème par la considération des règles de déduction autres que la règle de coupure .

Remarque :

Ce corollaire montre que le calcul T L J E est un bon calcul pour les catégories déductives de Bénabou . Ces catégories permettent l'interprétation des symboles v (pour vrai) , =, $\wedge$, $\bigvee x$. Les séquences à considérer ici sont du type $\Gamma \vdash \Phi^{V}$, où la suite de droite a pour longueur 1 et où les formules qui apparaissent sont écrites uniquement avec $=, \wedge, \bigvee$. Les axiomes de T L J E ainsi que les règles pour $\wedge$ et $\bigvee$ écrits avec des séquences du genre ci-dessus fonctionnent dans les catégories déductives . Si $\Gamma \vdash \Phi^{V}$ est démontrable dans T L J E , il existe une démonstration de $\Gamma \vdash \Phi^{V}$ qui n'utilise que les règles pour $\wedge$ et $\bigvee$ et où toutes les séquences sont du bon genre . $\Gamma \vdash \Phi^{V}$ est alors valide pour les catégories déductives . D'autre part puisque T L J E est complet pour les topos , il l'est pour les catégories déductives .

T L J E est un calcul correct et complet pour les catégories déductives .

REFERENCES

[1] Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney, exposés de J. BENABOU et J. CELEYRETTE au Séminaire BENABOU 1970-71.

[2] Exposé de M. COSTE au Séminaire BENABOU 1972-73.

[3] Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing
M.C. FITTING
North Holland

[4] The collected papers of Gerhard GENTZEN
(Investigations into logical deduction)
North Holland