CENTRE SCIENTIFIQUE ET
POLYTECHNIQUE
Place du 8 Mai 1945
93200 SAINT-DENIS

SEMINAIRE DE THEORIE DES CATEGORIES

DIRIGE PAR JEAN BENABOU

LOGIQUE D'ORDRE SUPERIEUR DANS LES TOPOS ELEMENTAIRES

par MICHEL COSTE

NOVEMBRE 1974

INTRODUCTION

Le but de ce papier est d'établir un système de déduction correct et complet pour la logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires. Ceci a déjà été fait pour la logique du premier ordre ([2]). Ici, tout repose sur l'utilisation des catégories avec déduction introduites par J. Bénabou [1]. Je suis arrivé de façon indépendante a des résultats qui sont essentiellement les mêmes que ceux de M. Fourman [3].

Au chapitre O on précise les langages logiques que l'on utilisera par la suite.

Au chapitre I, on présente les catégories avec déduction. Les résultats de ce chapitre sont dus à J. Bénabou. La présentation formelle de l'axiomatique des catégories avec déduction n'a d'autre but que d'introduire tout naturellement le système de déduction.

Au chapitre II, la considération des axiomes de catégorie avec déduction permet de dégager un système de déduction pour des séquents [5] qui est pratiquement celui de la théorie intuitionniste des types avec extensionnalité. On montre ensuite que ce système de déduction est correct et complet pour la sémantique à valeur dans les catégories avec déduction.

Au chapitre III, on construit de "vraies catégories" (catégories à $\varprojlim$ finies, catégories régulières, logos [4] , topos) à partir de catégories avec déduction. Cette construction est due à J. Bénabou ; on en donne ici le détail dans le cas des topos. Les catégories avec déduction considérées se plongent de façon "fidèle" dans les "vraies catégories" associées.

Au chapitre IV, on utilise cette "fidélité" et les résultats du chapitre II pour montrer que le système de déduction est correct et complet pour la sémantique à valeur dans les "vraies catégories". Le résultat nouveau par rapport à [2] est celui qui concerne les topos.

REFERENCE

[1] J. BENABOU - Catégories et logiques faibles
Tagungs bericht Oberwolfach 1973.

[2] M. COSTE - Logique du 1er ordre dans les topos élémentaires.
Séminaires J. Bénabou 1973-74.

[3] M. FOURMAN - The logic of topoi (à paraître)

[4] P. FREYD - On Canonizing Category Theory or On Functorializing Model Theory.

[5] G. GENTZEN - Investigations into logical deductions
The collectecd papers of G. Gentzen
M.E. Szabo editor
North - Holland

Chapite 0 - Langages d'ordre supérieur

N.B. : Les suites finies considérées peuvent être vides.

1) Un langage d'ordre supérieur $\mathcal{L}$ comprend :

- Un ensemble de <u>sortes</u>

  A partir de ces sortes, on fabrique les <u>types</u> de la manière suivante :

  * les sortes sont des types
  * si $(i_1,\dots,i_n)$ est une suite finie de types, $\Omega^{i_1,\dots,i_n}$ est un type.

  A tout type est associé un ensemble de variables.(Le type d'une variable pourra être indiqué par un exposant : x^i).

- Un ensemble de <u>symboles fonctionnels</u>, chacun muni d'une <u>source</u> qui est une suite finie de types et d'un <u>but</u> qui est un type. On notera $f : (i_1,\dots,i_n) \to j$ pour un symbole fonctionnel de source $(i_1,\dots,i_n)$ et de but j.

- Un ensemble de <u>symboles relationnels</u> , chacun muni d'une <u>signature</u> qui est une suite finie de types.

- Les symboles relationnels distingués $\underline{v}$ et $\underline{f}$ de signature $\emptyset$.

- Pour chaque type i , un symbole relationnel distingué $\underline{\asymp_i}$ de de signature (i,i).

- Pour chaque suite finie de types $(i_1,\dots,i_n)$ un symbole relationnel distingué $\underline{\varepsilon_{i_1,\dots,i_n}}$ de signature $(i_1,\dots,i_n, \Omega^{i_1,\dots,i_n})$.

- Les symboles logique $\underline{\wedge}$, $\underline{\vee}$, $\underline{\Rightarrow}$, $\underline{\forall}$, $\underline{\exists}$, $\underline{[\,|\,]}$.

2) Les <u>expression</u> de $\mathcal{L}$ sont soit des <u>termes</u>, soit des <u>formules</u>. Chaque expression est munie d'un ensemble fini de variables, noté VL (pour variables libres). Chaque terme est muni d'un type que l'on pourra indiquer en exposant. Les règles de formation des expressions sont :

* Une variable x^i est un terme de type i.
* Si $t_1^{i_1}, \ldots, t_n^{i_n}$ sont des termes et si $f : (i_1,\ldots,i_n) \to j$ est un symbole fonctionnel. $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme de type j et $VL(f(t_1,\ldots,t_n)) = \bigcup_{k=1}^{n} VL(t_k)$.
* Si $t_1^{i_1}, \ldots, t_n^{i_n}$ sont des termes et r un symbole relationnel de signature $(i_1,\ldots,i_n)$, $r(t_1,\ldots,t_n)$ est une formule et $VL(r(t_1,\ldots,t_n)) = \bigcup_{k=1}^{n} VL(t_k)$.
* Si ϕ et ψ sont des formules, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ et $\phi \to \psi$ sont des formules et $VL(\phi \overset{\wedge}{\underset{\to}{\vee}} \psi) = VL(\phi) \cup VL(\psi)$.
* Si ϕ est une formule et x une variable, $\forall x\, \phi$ et $\exists x\, \phi$ sont des formules et $VL(\overset{\forall}{\exists} x\, \phi) = VL(\phi) - \{x\}$.
* Si ϕ est une formule et $(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n})$ une suite finie de variables $[x_1, \ldots, x_n \mid \phi]$ est un terme de type $\Omega^{i_1,\ldots,i_n}$ et $VL([x_1,\ldots,x_n \mid \phi]) = VL(\phi) - \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Plusieurs éléments apparaissent dans la construction du langage que l'on peut désigner par $v, \wedge, f, \vee, \to, \forall, \exists, \asymp$ et Ω (pour tout ce qui fait que est d'ordre supérieur, c.a.d. la formation des types, $[\text{-}|\text{-}]$ et ε)
Dans les langages considérés par la suite, certains de ces éléments pourront manquer. On aura toujours au moins $v, \wedge$ et $\asymp$.

Chapitre I - Catégories avec déduction

1) Catégorie avec déduction

C'est une catégorie à produits finis $\underline{C}$ muni d'un foncteur : $\underline{C}^{op} \longrightarrow \underline{\text{Preord}}$ à valeur dans la catégorie des ensembles préordonnés avec pour morphismes les applications croissantes.

Ceci peut se formuler dans la théorie élémentaire suivante :
Le langage comprend trois sortes de variables :

Une sorte Ob des objets, désignés par $i, j, k, \ldots$
Une sorte $F\ell$ des flèches, désignées par $s, t, u, \ldots$
Une sorte Rel des relations, désignées par $\phi, \psi, \theta \ldots$

On exprime formellement le fait qu'on a :

a) Une catégorie :
avec les symboles fonctionnels
$S : F\ell \to Ob$ (source)
$B : F\ell \to Ob$ (but)
$Id : Ob \to F\ell$ (identité)

un symbole fonctionnel partiel $o : \{(s,t) \mid Ss = Bt\} \to F\ell$ (composition)

et les axiomes

$$S(Id_i) = B(Id_i) = i$$

$$s \circ (Id(Ss)) = Id(Bs)) \circ s = s$$

$$S(s \circ t) = St \quad , \quad B(s \circ t) = Bs$$

$$(s \circ t) \circ u = s \circ (t \circ u)$$

b) munie d'un objet final
avec les symboles fonctionnels
1 constante de type Ob (objet terminal)
$p\_ : Ob \to F\ell$ (flèche terminale)

et les axiomes

$$S(p_i)=i \quad , \quad B(p_i) = 1$$

$$Bs = 1 \Rightarrow s = p(Ss)$$

c) du produit de deux objets
avec les symboles fonctionnels

$$-\times- \quad : \quad Ob \times Ob \longrightarrow Ob \quad \text{(produit de deux objets)}$$

$$<-,-> \quad : \quad \{(s,t) \mid Ss = St\} \to F\ell \quad \text{(couple de deux flèches)}$$

$$p_{-,-} \; : \; Ob \quad Ob \to F\ell \qquad \text{(première projection)}$$
$$q_{-,-} \; : \; Ob \quad Ob \to F\ell \qquad \text{(deuxième projection)}$$

et les axiomes $S(<s,t>) = Ss = St$

$$B(<s,t>) = (Bs) \times (Bt)$$
$$S(p_{i,j}) = S(q_{i,j}) = i \times j$$
$$B(p_{i,j}) = i \;,\; B(q_{i,j}) = j$$
$$(p_{Bs,Bt}) \circ <s,t> = s \;,\; (q_{Bs,Bt}) \circ <s,t> = t$$
$$Bs = i \times j \Rightarrow < p_{i,j} \circ s \,,\; q_{i,j} \circ s > = s$$

On notera $s \times t$ le terme $<s \circ p_{Ss,St}, t \circ q_{Ss,St}>$ (produit de deux flèches).

d) et d'un foncteur contravariant à valeur dans <u>Preord</u> avec les symboles fonctionnels $\sigma : Rel \to Ob$ (signature)

$$-[-] \; : \{(\phi,t) | \sigma(\phi) = B(t)\} \to Rel \quad \text{(substitution)}$$

le symbole relationnel : $- \vdash -$ sur $Rel \times Rel$ (préordre)

et les axiomes : $\sigma(\phi[t]) = St$

$$(\phi[t])\,[s] = \phi[t \circ s] \;,\; \phi[Id\ \sigma(\phi)] = \phi$$
$$\phi \vdash \psi \Rightarrow \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$$

$$\boxed{\phi \vdash \psi \Rightarrow \phi[t] \vdash \psi[t]} \quad (0)$$

$$\boxed{\phi \vdash \phi} \quad (1) \qquad \boxed{\phi \vdash \psi \text{ et } \psi \vdash \theta \Rightarrow \phi \vdash \theta} \quad (2)$$

2) <u>Structures supplémentaires</u>

Ces structures supplémentaires permettront d'interpréter les symboles logiques. Certaines ne peuvent être introduites que quand d'autres existent déjà : ainsi $\asymp$ nécessite v et $\wedge$.

v) le vrai : pour tout objet i, un plus grand élément dans $\mathcal{R}(i)$ et ceci de façon compatible avec $\mathcal{R}$ (les $\mathcal{R}(s)$ doivent préserver ce plus grand élément). Ceci s'exprime formellement avec le symbole fonctionnel : $v\_ : Ob \to Rel$ et les axiomes $\sigma(v_i) = i \;,\; v_{Bt}[t] = v_{St}$

$$\boxed{\phi \vdash v_{\sigma(\phi)}} \quad (3)$$

$\wedge$) la conjonction : pour tout i , un inf de deux éléments dans $\mathcal{R}$(i), de façon compatible avec $\mathcal{R}$. Formellement, un symbole fonctionnel $-\wedge-$: $\{(\phi,\psi)|\sigma(\phi) = \sigma(\psi)\} \to$ Rel

et les axiomes $\sigma(\phi\wedge\psi) = \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$

$(\phi\wedge\psi)[t] = \phi[t]\wedge\psi[t]$

$$\boxed{\phi\vdash\theta \Rightarrow \phi\wedge\psi\vdash\theta} \quad (4) \qquad \boxed{\psi\vdash\theta \Rightarrow \phi\wedge\psi\vdash\theta} \quad (5)$$

$$\boxed{\phi\vdash\psi \text{ et } \phi\vdash\theta \Rightarrow \phi\vdash\psi\wedge\theta} \quad (6)$$

f) le faux : pour tout i , un plus petit élément dans $\mathcal{R}$(i) , de façon compatible avec $\mathcal{R}$. Formellement, un symbole fonctionnel f_- : Ob $\longrightarrow$ Rel

et les axiomes $\sigma(f_i) = i$, $f_{Bt}[t] = f_{St}$

$$\boxed{f_{\sigma(\phi)}\vdash\phi} \quad (7)$$

$\vee$) la disjonction : pour tout i , un sup de deux éléments dans $\mathcal{R}$(i), de façon compatible avec $\mathcal{R}$. On demande de plus que ce sup possède la double distributivité par rapport à l'inf (à l'équivalence $\dashv\vdash$ associée au préordre près) . Formellement

un symbole fonctionnel : $-\vee-$: $\{(\phi,\psi)|\ \sigma(\phi) = \sigma(\psi)\} \longrightarrow$ Rel

et les axiomes : $\sigma(\phi\vee\psi) = \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$, $(\phi\vee\psi)[t] = \phi[t]\vee\psi[t]$

$$\boxed{\phi\wedge\psi\vdash\chi \text{ et } \phi\wedge\theta\vdash\chi \Rightarrow \phi\wedge(\psi\vee\theta)\vdash\chi} \quad (8)$$

$$\boxed{\phi\vdash\psi \Rightarrow \phi\vdash\psi\vee\theta} \quad (9) \qquad \boxed{\phi\vdash\theta \Rightarrow \phi\vdash\psi\vee\theta} \quad (10)$$

$\to$) l'inplication : pour chaque i , une implication dans $\mathcal{R}$ (i) ($\phi\to -$ adjoint à droite de $-\wedge\phi : \mathcal{R}(i)\to\mathcal{R}(i)$) de façon compatible avec $\mathcal{R}$. Formellement :

un symbole fonctionnel $- \to - : \{(\phi,\psi) \mid \sigma(\phi) = \sigma(\psi)\} \to \mathrm{Rel}$

et les axiomes : $\sigma(\phi \to \psi) = \sigma(\phi) = \sigma(\psi) \quad (\phi \to \psi)[t] = \phi[t] \to \psi[t]$

$$\boxed{\phi \vdash \psi \text{ et } \theta \vdash \chi \Rightarrow \phi \wedge (\psi \to \theta) \vdash \chi} \quad (11)$$

$$\boxed{\phi \wedge \psi \vdash \theta \Rightarrow \phi \vdash \psi \to \theta} \quad (12)$$

$\forall$) la quantification universelle : pour chaque i et chaque j, un adjoint à droite $\forall_{i,j}$ de $\mathcal{R}(q_{i,j}) : \mathcal{R}(j) \longrightarrow \mathcal{R}(i \times j)$ de façon compatible avec $\mathcal{R}$ (le carré :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(i \times j) \arrow[r, "\forall_{i,j}"] \arrow[d, "\mathcal{R}(Id_i \times s)"'] & \mathcal{R}(j) \arrow[d, "\mathcal{R}(s)"] \\
\mathcal{R}(i \times k) \arrow[r, "\forall_{i,k}"] & \mathcal{R}(k)
\end{tikzcd}$$

doit commuter). Formellement :

un symbole fonctionnel : $\forall_{-,-} - : \{(i,j,\phi) \mid \sigma(\phi) = i \times j\} \to \mathrm{Rel}$

et les axiomes $\sigma(\forall_{i,j}\, \phi) = j \;,\; (\forall_{i,B_s} \phi)[s] = \forall_{i,Ss}(\phi[Id_i \times s])$

$$\boxed{\phi[\langle s, q_{k,j}\rangle] \vdash \psi \Rightarrow (\forall_{i,j}\, \phi)\, [q_{k,j}] \vdash \psi} \quad (13) \quad \text{pour } s : k \times j \to i$$

$$\boxed{\phi\, [q_{i,j}] \vdash \psi \Rightarrow \phi \vdash \forall_{i,j}\, \psi} \quad (14)$$

$\exists$) La quantification existentielle : pour chaque i et chaque j, un adjoint à gauche $\exists_{i,j}$ de $\mathcal{R}(q_{i,j})$, de façon compatible avec $\mathcal{R}$. On demande en plus une sorte de distributivité du $\wedge$ par rapport au $\exists$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{R}(i \times j) \times \mathcal{R}(j) \arrow[rr, "\exists_{i,j} \times \mathcal{R}(j)"'] \arrow[dl, "\mathcal{R}(i \times j) \times \mathcal{R}(q_{i,j})"] & & \mathcal{R}(j) \times \mathcal{R}(j) \arrow[dd, "\wedge"] \\
\mathcal{R}(i \times j) \times \mathcal{R}(i\ j) \arrow[dr, "\wedge"] & & & \\
 & \mathcal{R}(i \times j) \arrow[rr, "\exists_{i,j}"] & & \mathcal{R}(j)
\end{tikzcd}$$ commute.

(à l'équivalence $\equiv$ associée au préordre près).

Formellement, un symbole fonctionnel : $\exists_{-,-}\,- : \{(i,j,\phi)\,|\,\sigma(\phi)=i\times j\} \to \mathrm{Rel}$

et les axiomes $\sigma(\exists_{i,j}\ \phi) = j$, $(\exists_{i,Bs}\ \phi)[s] = \exists_{i,Ss}\ (\phi[Id_i \times s])$

$$\boxed{\phi \vdash \psi\ [q_{i,j}] \vdash \theta\ [q_{i,j}] \Rightarrow (\exists_{i,j}\ \phi) \wedge \psi \vdash \theta} \quad (15)$$

$$\boxed{\phi \vdash \psi[\langle s, q_{k,j}\rangle] \Rightarrow \phi \vdash (\exists_{i,j}\ \psi)\ [q_{k,j}]} \quad (16) \quad \text{pour } s : k\times j \to i$$

Cette formulation contient la "distributivité".

$\asymp$) l'égalité : pour chaque i , une relation $\asymp_i$ distinguée dans $\mathcal{R}(i\ \ i)$, avec les propriétés usuelles de l'égalité :
Formellement :

un symbole fonctionnel $\asymp_{-} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Rel}$

et les axiomes $\sigma(\asymp_i) = i \times i$ ($\asymp_i[\langle s,t\rangle]$ sera noté $s \asymp_i t$)

$$\boxed{v_i \vdash Id_i \asymp_i Id_i} \quad (17) \qquad \text{(réflexivité)}$$

$$\boxed{p_{i,i} \asymp_i q_{i,i} \vdash q_{i,i} \asymp_i p_{i,i}} \quad (18) \qquad \text{(symétrie)}$$

$$(19) \quad \boxed{(p_{i,i} \circ p_{i\times i,i} \asymp_i q_{i,i} \circ p_{i\times i,i}) \wedge (q_{i,i} \circ p_{i\times i,i} \asymp_i q_{i\times i,i}) \vdash p_{i,i} \circ p_{i\times i,i} \asymp_i q_{i\times i,i}}$$

(transitivité)

$$\boxed{p_{i,i} \asymp_i q_{i,i} \wedge \phi[p_{i,i}] \vdash \phi[q_{i,i}]} \quad (20)$$

$$\boxed{p_{i,i} \asymp_i q_{i,i} \vdash s \circ p_{i,i} \asymp_{B(s)} s \circ q_{i,i}} \quad (21) \quad \text{pour } S(s) = i$$

$$(p_{i,j} \circ p_{i\times j,i\times j} \asymp_i p_{i,j} \circ q_{i\times j,i\times j}) \wedge (q_{i,j} \circ p_{i\times j,i\times j} \asymp_j q_{i,j} \circ q_{i\times j,i\times j}) \vdash \ \ldots$$

$$\ldots \vdash p_{i\times j,i\times j} \asymp_{i\times j} q_{i\times j,i\times j}$$

(deux couples sont égaux si leurs composantes sont égales)

Ω) les ordres supérieurs : pour tout i , le foncteur $\mathcal{R}(i\times -)$ est "représentable" dans le sens suivant :

Il existe un objet Ω^i et pour tout j une application $\{-\}_{i,j} : \mathcal{R}(i\times j) \longrightarrow \mathrm{Hom}(j,\Omega^i)$ et une application $\mathrm{Pred}_{i,j} : \mathrm{Hom}(j,\Omega^i) \longrightarrow \mathcal{R}(i,j)$ de façon compatible avec $\mathcal{R}$ (les carrés

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(i\times j) \arrow[r, shift left, "\{-\}_{i,j}"] \arrow[d, "\mathcal{R}(i\times s)"'] & \mathrm{Hom}(j,\Omega^i) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Pred}_{i,j}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(s,\Omega^i)"] \\
\mathcal{R}(i\times k) \arrow[r, shift left, "\{-\}_{i,k}"] & \mathrm{Hom}(k,\Omega^i) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Pred}_{i,k}"]
\end{tikzcd}$$

commutent) avec $\mathrm{Pred}_{i,j}(\{\phi\}_{i,j}) \dashv\vdash \phi$ et

$$(\mathcal{R}(q_{i,j})(\psi)\wedge \mathrm{Pred}_{i,j}(s)\vdash \mathrm{Pred}_{i,j}(t)) \text{ et } (\mathcal{R}(q_{i,j})(\psi)\wedge \mathrm{Pred}_{i,j}(t)\vdash \mathrm{Pred}_{i,j}(s)) \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \psi \vdash \mathcal{R}\,(\langle s,t\rangle)\,(\asymp_{\Omega^i})$$

Cette dernière condition s'écrit aussi :

$$\forall_{i,j}\,(\mathrm{Pred}_{i,j}(s) \longleftrightarrow \mathrm{Pred}_{i,j}(t)) \dashv\vdash \mathcal{R}\,(\langle s,t\rangle)\,(\asymp_{\Omega^i})$$

quand on a la quantification universelle et l'implication.

En fait au lieu de $\mathrm{Pred}_{i,j}$ on se donnera une ralation ε_i distinguée dans $\mathcal{R}\,(i\times\Omega^i)$, et $\mathrm{Pred}_{i,j}$ sera :

$$s \longmapsto \mathcal{R}\,(i\times s)\,(\varepsilon_i)\ .$$

Formellement, on se donne :

les symboles fonctionnels : $\Omega^{-} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Ob}$

$\{-\}_{-,-} : \{(\phi,i,j)\,|\,\sigma(\phi) = i\times j\} \longrightarrow \mathrm{F}\ell$

$\varepsilon_{-} : \mathrm{Ob} \longrightarrow \mathrm{Rel}$

et les axiomes : $S(\{\phi\}_{i,j}) = j \qquad B(\{\phi\}_{i,j}) = \Omega^i$

$\sigma(\varepsilon_i) = i\times\Omega^i$ (on notera $\varepsilon_i[\langle s,t\rangle]$: $s\ \varepsilon_i\ t$)

$\{\phi\}_{i,Bt} \circ s = \{\phi[\mathrm{Id}_i\times s]\}_{i,St}$

$$\boxed{\phi[\langle s,q_{k,j}\rangle] \vdash \psi \implies s\ \varepsilon_i(\{\phi\}_{i,j} \circ q_{k,j}) \vdash \psi} \quad (22)$$

pour $s : k \times j \to i$

$$\boxed{\phi \vdash \psi[\langle s,q_{k,j}\rangle] \implies \phi \vdash s\ \varepsilon_i(\{\phi\}_{i,j} \circ q_{k,j})} \quad (23)$$

$$(24)\quad \boxed{\begin{array}{l} \phi[q_{i,j}] \wedge (p_{i,j}\ \varepsilon_i\ s o q_{i,j}) \vdash (p_{i,j}\ \varepsilon_i\ t o q_{i,j}) \text{ et } \phi[q_{i,j}] \wedge (p_{i,j}\ \varepsilon_i t o q_{i,j}) \vdash (p_{i,j} \varepsilon\ s o q_{i,j}) \\ \qquad \implies \phi \vdash s \asymp_{\Omega^i} t \end{array}}$$

pour s et $t : j \longrightarrow \Omega^i$

On notera $\ni_i$ la relation $\varepsilon_i[\langle q_{\Omega^i,i}, p_{\Omega^i,i}\rangle]$ de signature $\Omega^i \times i$.

3) Morphismes de catégories avec déduction

Soient $(\underline{C}, \mathcal{R} : \underline{C}^{op} \longrightarrow \underline{\text{Preord}})$ et $(\underline{D}, \mathcal{S} : \underline{D}^{op} \longrightarrow \text{Preord})$ deux catégories avec déduction, avec les mêmes structures additionnelles.
Un morphisme de $(\underline{C}, \mathcal{R})$ dans $(\underline{D}, \mathcal{S})$ sera un couple (F, α) où

* F est un foncteur de $\underline{C}$ dans $\underline{D}$ qui préserve les produits finis (et, éventuellement, le $\Omega^{\bullet}$: $F(\Omega^i) = \Omega^{F(i)}$) .
* α est une transformation naturelle de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{S} \circ F$, qui préserve tout ce qui compose les structures additionnelles communes à $(\underline{C}, \mathcal{R})$ et $(\underline{D}, \mathcal{S})$ (à l'équivalence $\leftrightarrows$ près).

4) Catégories à $\varprojlim$ finies, régulières, logos et topos

Soit $\underline{C}$ une catégorie à $\varprojlim$ finies.

Soit $\text{Sub} : \underline{C}^{op} \longrightarrow \underline{\text{Preord}}$ le foncteur "sous objet" $(\underline{C}, \text{Sub})$ est une catégorie avc déduction. Elle est même munie des structures additionnelles $\wedge$, v, $\asymp$ ($\asymp_i$ est interprété comme la diagonale $i \rightarrowtail i \times i$).
$\underline{C}$ peut être mieux qu'une catégorie à $\varprojlim$ finies. Par exemple si $\underline{C}$ est une catégorie régulière, $(\underline{C}, \text{Sub})$ est muni des structures additionnelles v, $\wedge$, $\asymp$, $\exists$; si $\underline{C}$ est un logos [4] , $(\underline{C}, \text{Sub})$ est muni des structures additionnelles "du 1er ordre"; si $\underline{C}$ est un topos , $(\underline{C}, \text{Sub})$ est muni de toutes les structures additionnelles.

Ceci explique les :

<u>Définitions</u> Une catégorie avec déduction munie :

i) des structures additionnelles $v, \wedge, \asymp$

ii) des structures additionnelles $v, \wedge, \asymp, \exists$

iii) des structures additionnelles du 1er ordre

iv) de toutes les structures additionnelles ,

est appelée :

i) catégorie à $\varprojlim$ finies formelle

ii) catégorie régulière formelle

iii) logos formel

iv) topos formel

<u>Remarque</u> : à partir du moment où on a les structures additionnelles $v, \wedge, \asymp, \Omega$, on a toutes les autres : on pose

* Pour $\sigma(\phi) = i \times j$, $\forall_{i,j}\, \phi = (\{\phi\}_{i,j} \asymp_{\Omega^i} \{v_{i \times j}\}_{i,j})$

* Pour $\sigma(\phi) = \sigma(\psi) = i$, $\phi \to \psi = (\{\phi \wedge \psi)[q_{1,i}]\}_{1,i} \asymp_{\Omega^1} \{\psi[q_{1,i}]\}_{1,i})$

* $f_i = \forall_{\Omega^i, i}\ \exists_i$

* Pour $\sigma(\phi) = \sigma(\psi) = i$, $\phi \vee \psi = \forall_{\Omega^i, i} \Big(\big((\phi[q_{\Omega^i, i}] \to \exists_i) \wedge (\psi[q_{\Omega^i, i}] \to \exists_i) \big) \to \exists_i \Big)$

* Pour $\sigma(\phi) = i \times j$, $\exists_{i,j}\, \phi = \forall_{\Omega^j, j} \Big((\forall_{i,j}\, \phi\, [q_{\Omega^j, j}] \to \exists_j) \to \exists_j \Big)$

On peut donc aussi définit un topos formel comme une catégorie avec déduction munie des structures additionnelles $v, \wedge, \asymp, \Omega$.

Les définitions données ci-dessus sont vraiment justifiées par la :

<u>Proposition</u> Soit $\underline{C}$ une catégorie à $\varprojlim$ finies

Si $(\underline{C}, \mathrm{Sub})$ est i) une catégorie régulière formelle

ii) un logos formel

iii) un topos formel

Alors $\underline{C}$ est i) une catégorie régulière

ii) un logos

iii) un topos

Montrons la proposition pour les topos

* $\underline{C}$ a déjà toutes les $\varprojlim$ finies

* $1 \xrightarrow{\{v_{1\times 1}\}_{1,1}} \Omega^1$ classifie les sous objets :

On a $\mathrm{Sub}(i)_{/\vdash\!\dashv} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sub}(i \times 1)_{/\vdash\!\dashv} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(i, \Omega^1)$

et l'inverse de cette bijection est bien donné par le produit fibré avec $\{v_{1\times 1}\}_{1,1}$:

$$\begin{tikzcd} j \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, "\phi"'] & 1 \arrow[d, "\{v_{1\times 1}\}_{1,1}"] \\ i \arrow[r, "\{\phi[q_{1,i}]\}_{1,i}"] & \Omega \end{tikzcd}$$

$f : k \to i$ factorise par ϕ ssi $\phi[f] \vdash\!\dashv v_k$ c.a.d.

ssi $\{\phi[q_{1,i}]\}_{1,i} \circ f = \{v_{1\times 1}\}_{1,1} \circ p_k$.

Le carré cidessus est donc un produit fibré.

* On a $\mathrm{Hom}(i \times j, \Omega^1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sub}(i \times j)_{/\vdash\!\dashv} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(j, \Omega^i)$

$\underline{C}$ est donc bien un topos.

Chapitre II - Système de déduction et théories

1) Considérations sur les axiomes de catégorie avec déduction

L'écriture formelle des axiomes du chapitre I est lourde. Une façon d'écrire plus commode consiste en l'emploi de variables. Considérons par exemple l'axiome :

$$(p_{i,i} op_{i\times i,i} \asymp_i q_{i,i} op_{i\times i,i}) \wedge (q_{i,i} op_{i\times i,i} \asymp_i q_{i\times i,i}) \vdash p_{i,i} op_{i\times i,i} \asymp_i q_{i\times i,i} .$$

On a affaire aux projections du produit $i \times i \times i$ sur chacun de ses facteurs. Désignons chaque projection par une variable munie d'un "type" pour désigner le but de la projection ; ici $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$. L'axiome devient : $a^{(i)} \asymp_i b^{(i)} \wedge b^{(i)} \asymp_i c^{(i)} \vdash a^{(i)} \asymp_i c^{(i)}$, ce qui est beaucoup plus lisible.

Toujours dans un souci de lisibilité, on pourra remplacer les écritures $\forall_{i,j}\ \phi$, $\exists_{i,j}\ \phi$ et $\{\phi\}_{i,j}$ en utilisant des variables liées : on écrira $\forall x^{(i)}\ \phi(x^{(i)})$, $\exists x^{(i)}\ \phi(x^{(i)})$, $[x^{(i)} \mid \phi(x^{(i)})]$.

Il faut faire attention à ce que cette écriture puisse exprimer toute l'information contenue dans l'écriture formelle. Ainsi le but de la projection indiquée par une variable est indiqué par le type de cette variable, mais la source n'apparait pas clairement. On peut repérer cette source par l'ensemble fini des variables qui représentent les projections de la source sur chacun de ses facteurs.

Plus précisément, supposons l'ensemble des variables totalement ordonné. Soit $\{a_1^{(i_1)}, \dots, a_n^{(i_n)}\}$ un ensemble fini de variables, rangées dans l'ordre croissant. On peut lui associer le produit $i_1 \times \dots \times i_n$ et chaque variable désignera sans ambiguité une projection du produit sur un de ses facteurs.

Ainsi les "sequents" $\phi \vdash \psi$ seront écrits avec un ensemble fini de variables en exposant pour désigner la signature de ϕ et ψ. Par exemple :

$$a^{(i)} \asymp_i b^{(i)} \vdash b^{(i)} \asymp_i a^{(i)\{a^{(i)},\, b^{(i)}\}} \quad \text{est une inégalité dans } \mathcal{R}(i \times i)$$

$$a^{(i)} \asymp_i b^{(i)} \vdash b^{(i)} \asymp_i a^{(i)\{a^{(i)},b^{(i)},c^{(i)}\}} \quad \text{est une inégalité dans } \mathcal{R}(i \times i \times i)$$

Cet exemple montre aussi que l'on peut noter de la même façon une relation ϕ et son image par $\mathcal{R}(t)$ quand t est une projection, puisque l'on saura quelle signature il faut considérer.

Encore un exemple : l'axiome $\phi[q_{i,j}] \vdash \psi \implies \phi \vdash \forall_{i,j}\ \psi$ sera réécrit $(\phi \vdash \psi(a^i)^{V\cup\{a^i\}}) \implies (\phi \vdash \forall x^{(i)}\ \psi(x^{(i)})^V)$ pour $a \notin V$

Ce processus de réécriture des axiomes fait bien apparaitre qu'il y a des axiomes qui fixent les conventions, et d'autres, ceux qui sont encadrés, qui donnent un système de déduction pour des séquents que l'on va présenter.

2) Le système de déduction

On suppose donné un langage $\mathcal{L}$ d'ordre supérieur. Les séquents considérés sont de la forme $\phi \vdash \psi^V$ où ϕ et ψ sont des formules de $\mathcal{L}$ et V un ensemble fini de variables contenant les variables libres de ϕ et ψ.

substitution (0) $$\frac{\phi(a) \vdash \psi(a)^{V\cup\{a\}}}{\phi(t) \vdash \psi(t)^{V'}} \quad a \notin V,\ \ V' \supset (V \cup VL(t))$$

(1) $$\phi \vdash \phi^{\,V}$$

coupure (2) $$\frac{\phi \vdash \psi^{\,V} \qquad \psi \vdash \theta^{\,V}}{\phi \vdash \theta^{\,V}}$$

v) (3) $$\phi \vdash v^{\,V}$$

$\wedge$) (4) $$\frac{\phi \vdash \theta^V}{\phi \wedge \psi \vdash \theta^V}$$ (5) $$\frac{\psi \vdash \theta^V}{\phi \wedge \psi \vdash \theta^V}$$ (6) $$\frac{\phi \vdash \psi^V \quad \phi \vdash \theta^V}{\phi \vdash \psi \wedge \theta^V}$$

f) (7) $$f \vdash \phi^V$$

v) (8) $$\frac{\phi \wedge \psi \vdash \chi^V \quad \phi \wedge \theta \vdash \chi^V}{\phi \wedge (\psi \vee \theta) \vdash \chi^V}$$ (9) $$\frac{\phi \vdash \psi^V}{\phi \vdash \psi \vee \theta^V}$$ (10) $$\frac{\phi \vdash \theta^V}{\phi \vdash \psi \vee \theta^V}$$

$\to$) (11) $$\frac{\phi \vdash \psi^V \quad \theta \vdash \chi^V}{\phi \wedge (\psi \to \phi) \vdash \chi^V}$$ (12) $$\frac{\phi \wedge \psi \vdash \theta^V}{\phi \vdash \psi \to \theta^V}$$

$\forall$) (13) $$\frac{\phi(s) \vdash \psi^V}{\forall x\ \phi(x) \vdash \psi^V}$$ (14) $$\frac{\phi \vdash \psi(a)^{V\cup\{a\}}}{\phi \vdash \forall x\ \psi(x)} \quad a \notin V$$

$\exists$) (15) $$\frac{\phi(a) \wedge \psi \vdash \theta^{V\cup\{a\}}}{(\exists x\ \phi(x)) \wedge \psi \vdash \theta^V} \quad a \notin V$$ (16) $$\frac{\phi \vdash \psi(s)^V}{\phi \vdash \exists x\ \psi(x)^V}$$

$\asymp$) (17) $v \vdash a \asymp a^{\{a\}}$

(18) $a \asymp b \vdash b \asymp a^{\{a,b\}}$

(19) $a \asymp b \wedge b \asymp c \vdash a \asymp c^{\{a,b,c\}}$

(20) $a_1 \asymp b_1 \wedge \ldots \wedge a_n \asymp b_n \wedge r(a_1,\ldots,a_n) \vdash r(b_1,\ldots,b_n)^{\{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\}}$

(21) $a_1 \asymp b_1 \wedge \ldots \wedge a_n \asymp b_n \vdash f(a_1,\ldots,a_n) \asymp f(b_1,\ldots,b_n)^{\{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\}}$

Ω) (22) $$\frac{\phi(s_1,\ldots,s_n) \vdash \psi^V}{(s_1,\ldots,s_n) \in [x_1,\ldots,x_n \mid \phi(x_1,\ldots,x_n)] \vdash \psi^V}$$

(23) $$\frac{\phi \vdash \psi(s_1,\ldots,s_n)^V}{\phi \vdash (s_1,\ldots,s_n) \in [x_1,\ldots,x_n \mid \psi(x_1,x_n)]^V}$$

(24) $$\frac{\phi \wedge (a_1,..,a_n) \varepsilon s \vdash (a_1,..,a_n) \varepsilon t^{V \cup \{a_1,..,a_n\}} \quad \phi \wedge (a_1,..,a_n) \varepsilon t \vdash (a_1,..,a_n) \varepsilon s^{V \cup \{a_1,..,a_n\}}}{\phi \vdash s \asymp t^V}$$

pour $\{a_1,..,a_n\} \cap V = \emptyset$

3) <u>Semantique à valeur dans une catégorie avec déduction</u>

Soit $\mathcal{L}$ un langage logique comprenant une partie P des éléments $v, \wedge, f, \vee, \forall, \exists, \rightarrow, \asymp, \Omega$ ($P \supset \{v, \wedge, \asymp\}$). On peut alors définir une interprétation de $\mathcal{L}$ dans une catégorie déductive ($\underline{C}$, $\mathcal{R}$) munie des structures correspondant aux éléments de P.

Pour chaque sorte de variable i on choisit un objet $|i|$ de $\underline{C}$, ce qui permet si le langage $\mathcal{L}$ et d'ordre supérieur d'assigner un objet à chaque type : au type $\Omega^{i_1,\ldots,i_n}$ on assignera $|\Omega^{i_1,\ldots,i_n}| = \Omega^{|i_1|\times\ldots\times|i_n|}$.

Pour chaque symbole de fonction $f : j_1,\ldots,j_n \rightarrow j$ on choisit une flèche $|f| : |j_1|\times \ldots \times|j_n| \longrightarrow |j|$ et pour chaque symbole de relation r de signature $(j_1,\ldots,j_n)$ une relation $|r|$ de $\mathcal{R}(|j_1|\times\ldots\times|j_n|)$. Si E est une expression de $\mathcal{L}$ et V un ensemble de variables de $\mathcal{L}$ contenant les variables libres de E, on définit de façon évidente par induction sur le nombre de signes de E une interprétation $|(E,V)|$ du couple (E,V).

Soit $V = \{a_1^{i_1},\ldots, a_n^{i_n}\}$. Si E est un terme t de type j, $|t,V|$ sera une flèche $|i_1|\times \ldots \times|i_n| \longrightarrow |j|$. Si E est une formule ϕ, $|(\phi,V)|$ sera une relation de $\mathcal{R}(|i_1|\times \ldots \times|i_n|)$.

Le séquent $\phi \vdash \psi^V$ sera alors valide si $|\phi,V| \vdash |\psi,V|$.

Soit $\mathcal{T}$ une théorie, exprimée dans le langage $\mathcal{L}$, pour la partie du système de déduction du §2 qui correspond à P. (Les axiomes de $\mathcal{T}$ sont des séquents $\phi \vdash \psi^V$, et les théorèmes de $\mathcal{T}$ sont tous les séquents démontables à partir des axiomes dans le système de déduction tronqué en P.). Un modèle de $\mathcal{T}$ est une interprétation de $\mathcal{L}$ dans laquelle tout axiome de $\mathcal{T}$ est valide. Il est facile de voir que tout théorème de $\mathcal{T}$ est valide dans un modèle de $\mathcal{T}$.

4) Catégorie avec déduction associée à une théorie

Supposons donnée la théorie $\mathcal{T}$, exprimée dans $\mathcal{L}$. On peut lui associer une catégorie avec déduction $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ munie des structures additionnelles de P.

On a $\mathcal{D}(\mathcal{T}) = (\underline{C}, \mathcal{R})$ avec :

* Les objets de $\underline{C}$ sont des n-uples $(i_1, \dots, i_n)$ de types de $\mathcal{L}$, pour tout entier n. A chaque n-uple $(i_1, \dots, i_n)$ sera associé une fois pour toutes un n-uple de variables $(a_1^{i_1}, \dots, a_n^{i_n})$.

* Les flèches de $(i_1, \dots, i_n)$ dans $(j_1, \dots, j_p)$ sont les p-uples de termes $(t_1^{j_1}, \dots, t_p^{j_p})$ tels que les variables libres de t_i soient parmi $a_1, \dots, a_n$.

* Les éléments de $\mathcal{R}(i_1, \dots, i_n)$ sont les formules dont les variables libres sont parmi $a_1, \dots, a_n$. On aura $\phi \vdash \psi$ dans $\mathcal{R}(i_1, \dots, i_n)$ si et seulement si le sequent $\phi \vdash \psi^{\{a_1, \dots, a_n\}}$ est un théorème de $\mathcal{T}$

Il y a un modèle canonique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. On pose :

* pour toute sorte i, $|i| = (i)$
* pour tout symbole fonctionnel $f : i_1, \dots, i_n \to j$, $|f| = f(a_1, \dots, a_n)$
* pour tout symbole relationnel r de signature $(i_1, \dots, i_n)$, $|r| = r(a_1, \dots, a_n)$.

Les seuls séquents de $\mathcal{L}$ valides dans ce modèle sont les théorèmes de $\mathcal{T}$.

On peut remarquer qu'il y a bijection entre les modèles de $\mathcal{T}$ dans $(\underline{D}, \mathcal{S})$ et les morphismes de $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ dans $(\underline{D}, \mathcal{S})$.

5) Théorème

Les théorèmes de $\mathcal{T}$ sont les séquents valides dans tout modèle de $\mathcal{T}$. Autrement dit : le système de déduction tronqué en P est correct et complet pour la sémantique à valeur dans les catégories avec déduction munies des structures additionnelles de P.

Chapitre III - "Vraies catégories" associées à des catégories avec déduction

N.B. : Dans ce chapitre on n'utilisera pas l'écriture formelle du chapitre I, mais l'écriture "avec des variables" introduite au chapitre II, §1.

1) Cas des catégories à $\varprojlim$ finies formelles

Soit $(\underline{C}, \mathcal{R})$ une catégorie à $\varprojlim$ finies formelle. Soit $\mathcal{S}(\underline{C}, \mathcal{R})$ la catégorie dont :

* les objets sont les couples (i,ϕ) où i est un objet de $\underline{C}$ et $\phi \in \mathcal{R}(i)$
* les flèches de (i,ϕ) dans (j,ψ) sont les classes d'équivalence de flèches $t : i \to j$ de $\underline{C}$ telles que $\phi(a) \vdash \psi(t(a))^{\{a^i\}}$ pour la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$t \sim t' \iff \phi(a) \vdash t(a) \simeq_j t'(a)^{\{a^i\}}$$

On vérifie que :

<u>Proposition</u> $\mathcal{S}(\underline{C}, \mathcal{R})$ est une catégorie à $\varprojlim$ finies.

On a un morphisme de catégories avec déduction :

$$(F,\alpha) : (\underline{C}, \mathcal{R}) \longrightarrow (\mathcal{S}(\underline{C}, \mathcal{R}), \mathrm{Sub})$$

défini par * $F(i) = (i,v_i)$ $\quad F(t : i \to j) = (i,v_i) \xrightarrow{\overline{t}} (j,v_j)$

* $\alpha(\phi) = (i,\phi) \rightarrowtail^{\overrightarrow{Id}} (i,v_i)$ pour $\phi \in \mathcal{R}(i)$

Ce morphisme est fidèle dans le sens suivant :

<u>Définition</u> Un morphisme de catégorie avec déduction

$$(F,\alpha) : (\underline{C}, \mathcal{R}) \longrightarrow (\underline{D}, \mathcal{S})$$

est <u>fidèle</u> si pour tout i, pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{R}(i)$

$$\alpha_i(\phi) \vdash \alpha_i(\psi) \Longrightarrow \phi \vdash \psi$$

<u>Remarque</u> : La construction de $\mathcal{S}(\underline{C}, \mathcal{R})$ fournit un adjoint à gauche à l'inclusion :

$$\underline{\varprojlim \text{ finies}} \hookrightarrow \underline{\varprojlim \text{ finies form}}$$

de la catégorie des catégories à $\varprojlim$ finies dans la catégorie des catégories à $\varprojlim$ finies formelles. (Plus exactement, une solution du problème universel aux isomorphismes naturels près).

2) <u>Cas des catégories régulières formelles, logos formels, topos formels</u>

Soit $(\underline{C}, \mathcal{R})$ i) une catégorie régulière formelle . Soit
ii) un logos formel
iii) un topos formel

$\mathcal{S}(\underline{C}, \mathcal{R})$ la catégorie dont :

* les objets sont les couples (i,ϕ) où i est un objet de $\underline{C}$ et $\phi \in \mathcal{R}(i)$
* les flèches de (i,ϕ) dans (j,ψ) sont les classes d'équivalence de $\theta \in \mathcal{R}(i \times j)$ tels que :

$$\begin{cases} \theta(a,b) \vdash \phi(a)^{\{a^i,b^i\}} \quad \theta(a,b) \vdash \psi(b)^{\{a,b\}} \\ \phi(a) \vdash \exists y^j \quad \theta(a,y)^{\{a\}} \\ \theta(a,b_1) \wedge \theta(a,b_2) \vdash b_1 \asymp_j b_2^{\{a,b_1,b_2\}} \end{cases}$$

pour la relation d'équivalence $\sim$ définie par :

$$\theta \sim \theta' \iff \theta(a,b) \vdash \theta'(a,b)^{\{a,b\}} \text{ et } \theta'(a,b) \vdash \theta(a,b)^{\{a,b\}}$$

On notera $\overline{\theta}$ la classe d'équivalence de θ .

* l'identité de (i,ϕ) est $\overline{\phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge a_1 \asymp_i a_2}$
* le composé de $\underline{\overline{\theta} : (i,\phi) \longrightarrow (j,\psi)}$ et $\overline{\rho}\ (j,\psi) \longrightarrow (k,\chi)$ est $\overline{\rho} \circ \overline{\theta} = \exists y^j\ \theta(a^i,y) \wedge \rho(y,c^k)$

Toutes ces données s'organisent bien pour faire une catégorie.

On peut vérifier par exemple que le composé de deux flèches est bien une flèche. Pour cela on utilise le système de déduction tiré des axiomes de catégorie avec déduction ; on sautera quelquefois des étapes dans les démonstrations.

$$* \quad \begin{array}{c} \theta(a,b) \vdash \phi(a)^{\{a^i,b^j\}} \\ \hline \theta(a,b) \wedge \rho(b,c) \vdash \phi(a)^{\{a^i,b^j,c^k\}} \\ \hline \exists\, y(\theta(a,y) \wedge \rho(y,c)) \vdash \phi(a)^{\{a,c\}} \end{array} \qquad * \quad \begin{array}{c} \rho(b,c) \vdash \chi(c)^{\{b^j,c^k\}} \\ \hline \theta(a,b) \wedge \rho(b,c) \vdash \chi(c)^{\{a,b,c\}} \\ \hline \exists\, y(\theta(a,y) \wedge \rho(y,c)) \vdash \chi(c)^{\{a,c\}} \end{array}$$

$$* \quad \begin{array}{c} \theta(a,b) \vdash \psi(b)^{\{a,b\}} \qquad \psi(b) \vdash \exists\, z \;\; \rho(b,z)^{\{b\}} \\ \hline \theta(a,b) \vdash \exists z\, \rho(b,z)^{\{a,b\}} \qquad \theta(a,b) \vdash \theta(a,b)^{\{a,b\}} \\ \hline \theta(a,b) \vdash (\exists\, z\, \rho(b,z)) \wedge \theta(a,b)^{\{a,b\}} \\ \hline \theta(a,b) \vdash \exists\, y((\exists\, z\, \rho(y,z)) \wedge \theta(a,y))^{\{a,b\}} \\ \hline \phi(a) \vdash \exists\, y\; \theta(a,y)^{\{a\}} \qquad \exists\, y \;\; \theta(a,y) \vdash \exists\, y((\exists\, z\, \rho(y,z)) \wedge \theta(a,y))^{\{a\}} \\ \hline \phi(a) \vdash \exists\, y((\;\; z\, \rho(y,z)) \wedge \theta(a,y))^{\{a\}} \\ \hline \vdots \\ \hline \phi(a) \vdash \exists\, z \;\; \exists\, y(\theta(a,y) \wedge \rho(y,z))^{\{a\}} \end{array}$$

$$* \quad \begin{array}{c} \theta(a_1\; b_1) \wedge \theta(a_1\; b_2) \vdash b_1 \asymp b_2^{\{a,b_1,b_2\}} \qquad \rho^{(b_1,c_1)} \wedge b_1 \asymp b_2 \vdash \rho(b_2,c_1)^{\{b_1,b_2,c_1\}} \\ \hline \vdots \\ \hline \theta(a,b_1) \wedge \rho(b_p c_1) \wedge \theta(a,b_2) \wedge \rho(b_2 c_2) \vdash \rho(b_2 c_1) \wedge \rho(b_2 c_2)^{\{a,b_1 b_2 c_1 c_2\}} \qquad \rho(b_2,c_1) \wedge \rho(b_2,c_2) \vdash c_1 \asymp c_2^{\{b_2,c_1,c_2\}} \\ \hline \theta(a,b_1) \wedge \rho(b_1,c_1) \wedge \theta(a,b_2) \wedge \rho(b_2,c_2) \vdash c_1 \asymp c_2^{\{a,b_1,b_2,c_1,c_2\}} \\ \hline \exists\, y(\theta(a,y) \wedge \rho(y,c_1)) \wedge \exists\, y(\theta(a,y) \wedge \rho(y,c_2)) \vdash c_1 \asymp c_2^{\{a,c_1,c_2\}} \end{array}$$

<u>Proposition</u> $\left[\begin{array}{lll} \mathscr{S}(\underline{C}, \mathcal{R}) & \text{est} & \text{i) une catégorie régulière} \\ & & \text{ii) un logos} \\ & & \text{iii) un topos} \end{array} \right.$

Montrons iii) (le début de la démonstration peut servir aussi pour i) et ii)).

* <u>L'objet final est</u> $(1, v_1)$. La flèche terminale $(i,\phi) \longrightarrow (1, v_1)$ est $\phi(a) \wedge \varepsilon^1 \asymp \rho_i(a)$. C'est bien une flèche. Pour montrer qu'elle est unique, on peut montrer le :

<u>Lemme</u> $\left[\ v \vdash \varepsilon_1 \asymp_1 \varepsilon_2^{\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}}\right.$

Parce que $v \vdash \varepsilon \asymp_1 \varepsilon^{\{\varepsilon\}}$ et $1 \times 1 \xrightarrow{\rho_{1,1}} 1 \xrightarrow{<Id_1, Id_1>} 1 \times 1 = Id_{1\times 1}$.

Soit maintenant $\overline{\theta} : (i,\phi) \longrightarrow (1,\ v_1)$

$$\dfrac{\theta(a,\varepsilon_1) \vdash \phi(a)^{\{a,\varepsilon_1\}} \qquad \dfrac{v \vdash \varepsilon_1 \asymp \varepsilon_2^{\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}}{v \vdash \varepsilon_1 \asymp p_i(a)^{\{a,\ \varepsilon_1\}}}}{\theta(a,\varepsilon_1) \vdash \phi(a) \wedge \varepsilon_1 \asymp p_i(a)^{\{a,\varepsilon_1\}}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\phi(a) \vdash \exists \eta^1\ \theta(a,\eta) \qquad \exists \eta^1\ \theta(a,\eta) \vdash \theta(a,\ \varepsilon_2)^{\{a,\varepsilon_2\}}\! \qquad \dfrac{\dfrac{v \vdash \varepsilon_1 \asymp \varepsilon_2^{\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}} \qquad \theta(a,\varepsilon_1) \wedge \varepsilon_1 \asymp \varepsilon_2 \vdash \theta(a,\varepsilon_2)^{\{a,\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}}{\theta(a,\varepsilon_1) \vdash \theta(a,\ \varepsilon_2)^{\{a,\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}}}{}}{\phi(a) \vdash \theta(a,\ \varepsilon_2)^{\{a,\varepsilon_2\}}}}{\phi(a) \wedge \varepsilon_2 \asymp p_i(a) \vdash \theta(a,\ \varepsilon_2)^{\{a,\ \varepsilon_2\}}}$$

Ainsi $\overline{\theta} = \overline{\phi(a) \wedge \varepsilon \asymp p_i(a)}$.

* Le produit fibré de

$$\begin{tikzcd}
(i,\phi) \arrow[dr, "\overline{\theta}"'] & & (j,\psi) \arrow[dl, "\overline{\rho}"] \\
& (k,\chi) &
\end{tikzcd}$$

est

$$\begin{tikzcd}
& (i\times j\ ,\ \exists z\ \ \theta(a_1,z) \wedge \rho(b_1,z)) \arrow[dl, "\overline{\exists z\ \theta(a_1,z) \wedge \rho(b_1,z) \wedge a_1 \asymp a_2}"'] \arrow[dr, "\overline{\exists z\ \theta(a_1,z) \wedge \rho(b_1,z) \wedge b_1 \asymp b_2}"] & \\
(i,\ \phi(a_2)) & & (j,\ \psi(b_2))
\end{tikzcd}$$

Ceci permet de montrer le :

<u>Lemme</u> $\left[\begin{array}{l} \overline{\theta} : (i,\phi) \longrightarrow (j,\psi) \ \text{ est un mono ssi :} \\ \phi(a_1^i) \wedge \phi(a_2^i) \wedge \ \exists y^i\ (\theta(a_1,y) \wedge \theta(a_2,y)) \vdash a_1 \asymp a_2^{\{a_1,a_2\}} \end{array}\right.$

en exprimant que

$$\begin{tikzcd} (i,\phi) \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "Id"'] & (i,\phi) \arrow[d, "\overline{\theta}"] \\ (i,\phi) \arrow[r, "\overline{\theta}"] & (j,\psi) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

* <u>Notations</u> : Ω^1 sera noté Ω.

Soit $\phi \in \mathcal{O}(i)$. On notera $||\phi||$ la flèche de $\underline{C}$

$$[\eta^1 \mid \phi(a)] \; : \; i \longrightarrow \Omega$$

* $(1, v_1) \xrightarrow{\overline{\omega^\Omega \asymp ||v||}} (\Omega, v_\Omega)$ classifie les sous objets.

Soit $\overline{\theta} : (i,\phi) \longrightarrow (j,\psi)$ un mono. Sa flèche caractéristique est $\overline{\omega^\Omega \asymp || \; \exists x \; \theta(x,b) \; || \wedge \psi(b)}$

Le produit fibré de

$$\begin{tikzcd} & (1, v_1) \arrow[d, "\overline{\omega^\Omega \asymp ||v_1||}"] \\ (j,\psi) \arrow[r, "\overline{\omega^\Omega \asymp ||\exists x \; \theta(x,b)|| \wedge \psi(b)}"] & (\Omega, v_\Omega) \end{tikzcd}$$

est $(j\times 1 \; , \; \exists \omega(\omega \asymp ||\exists x \; \theta(x,b)|| \wedge \psi(b) \wedge \omega \asymp ||v_1||)$ et ceci est isomorphe à $(j, \; \exists x \; \theta(x,b))$. Or $\overline{\theta} : (i,\phi) \longrightarrow (j, \exists x \; \theta(x,b))$ est un isomorphisme (on utilise le lemme ci-dessus qui caractérise les monos). (i,ϕ) est bien image réciproque du sous objet générique par sa flèche caractéristique.

Il reste à voir que la flèche caractéristique est bien unique. Soit $\overline{\rho} : (j,\psi) \longrightarrow (\Omega, v_\Omega)$ une flèche telle que :

$$\begin{tikzcd} (i,\phi) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\theta}"'] \arrow[dr, phantom, "p.f."] & (1, v_1) \arrow[d, "\overline{\omega \asymp ||v_1||}"] \\ (j,\psi) \arrow[r, "\overline{\rho}"] & (\Omega, v_\Omega) \end{tikzcd}$$

Ceci veut dire que :

$$\exists \omega \; (\rho(b,\omega) \wedge \omega \asymp ||v_1||) \vdash\!\dashv \exists x \; \theta(x,b)^{\{b\}}$$

On a donc $\quad \rho(b,\omega) \wedge \omega \asymp ||v_1|| \vdash \exists x \; \theta(x,b)^{\{b,\omega\}}$

d'où $\quad (\alpha): \rho(b,\omega) \wedge \varepsilon \;\; \varepsilon_1 \; \omega \;\; \vdash \;\; \varepsilon \;\; \varepsilon_1 \; ||\exists x \; \theta(x,b)||^{\{\varepsilon,b,\omega\}}$

D'autre part

$$\dfrac{\dfrac{\rho(b,\omega_1)\wedge\rho(b,\omega_2) \vdash \omega_1 \asymp \omega_2^{\{\omega_1,\omega_2,b\}} \qquad \omega_1 \asymp \omega_2 \wedge \omega_2 \asymp ||v_1|| \vdash \omega_1 \asymp ||v_1||^{\{\omega_1,\omega_2\}}}{\exists x\ \theta(x,b) \vdash \exists\omega(\rho(b,\omega)\wedge\omega\asymp||v_1||)^{\{b\}} \qquad \dfrac{\rho(b,\omega_1)\wedge\rho(b,\omega_2)\wedge\omega_2 \asymp ||v_1|| \vdash \omega_1 \asymp ||v_1||^{\{\omega_1,\omega_2,b\}}}{\rho(b,\omega_1)\wedge\exists\omega(\rho(b,\omega)\wedge\omega\asymp||v_1||) \vdash \omega_1 \asymp ||v_1||^{\{\omega_1,b\}}}}}{\dfrac{\rho(b,\omega_1)\wedge\exists x\ \theta(x,b) \vdash \omega_1 \asymp ||v_1||^{\{\omega_1,b\}}}{\vdots}}$$

$$\overline{(\beta) : \ \rho(b,\omega_1)\wedge\varepsilon\ \ \varepsilon_1\ ||\exists x\ \ \theta(x,b)|| \vdash \varepsilon\ \varepsilon_1\ \omega_1}^{\{\varepsilon,\omega_1,b\}}$$

D'où en utilisant (α) et (β) :

$$\dfrac{\rho(b,\omega)\wedge\varepsilon\ \ \varepsilon_1\ \omega \vdash \varepsilon\ \varepsilon_1\ ||\exists x\ \theta(x,b)||^{\{\varepsilon,b,\omega\}} \qquad \rho(b,\omega)\wedge\varepsilon\ \varepsilon_1||\exists x\ \theta(x,b)|| \vdash \varepsilon\ \varepsilon_1\omega^{\{\varepsilon,b,\omega\}}}{(\gamma) : \ \rho(b,\omega) \vdash \omega \asymp ||\exists x\ \theta(x,b)||^{\{b,\omega\}}}$$

Maintenant on a :

$$\dfrac{\psi(b) \vdash \exists\omega\ \ \rho(b,\omega)^{\{b\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\gamma) : \rho(b,\omega) \vdash \omega \asymp ||\exists x\ \theta(x,b)||^{\{b,\omega\}}}{\vdots}}{\rho(b,\omega) \vdash \rho(b,\ ||\exists x\ \theta(x,b)||)^{\{b,\omega\}}}}{\exists\omega\ \rho(b,\omega) \vdash \rho(b,||\exists x\ \theta(x,b)||)^{\{b\}}}}{\dfrac{\psi(b) \vdash \rho(b,\ ||\exists x\ \theta(x,b)||)^{\{b\}}}{\vdots}}$$

$$\overline{(\delta) : \ \psi(b)\wedge\omega \asymp ||\exists x\ \ \theta(x,b)|| \vdash \rho(b,\omega)}^{\{b,\omega\}}$$

En rassemblant (γ), (δ) et $\rho(b,\omega) \vdash \psi(b)^{\{b,\omega\}}$ on a finalement :

$$\bar{\rho} = \overline{\omega \asymp ||\exists x\ \ \theta(x,b)|| \wedge \psi(b)}\ .$$

* Pour tout (i,ϕ) il existe un objet $(\Omega,\ v_\Omega)^{(i,\phi)}$ qui est $(\Omega^i,\ \forall x^i(x\ \varepsilon_i\ \alpha \to \phi(x)))$ et on a bien :

  $$\mathrm{Hom}((i,\phi) \times (j,\psi)\ ,\ (\Omega,\ v_\Omega)) \simeq \mathrm{Hom}\ ((j,\psi)\ ,\ (\Omega,\ v_\Omega)^{(i,\phi)})$$

La correspondance s'établit de la manière suivante :

- Soit $\overline{\theta} : (i,\phi)\times(j,\psi) \longrightarrow (\Omega, v_\Omega)$. On lui associe

$$\overline{\alpha \asymp_{\Omega^i} [x^i|\theta(x,b^j,||v_1||)] \wedge \psi(b) : (j,\psi) \to (\Omega,v_\Omega)^{(i,\phi)}}$$

- Soit $\overline{\rho} : (j,\psi) \longrightarrow (\Omega, v_\Omega)^{(i,\phi)}$. On lui associe

$$\overline{\omega \asymp ||\exists \xi^{\Omega^i}(\rho(b,\xi)\wedge a \,\varepsilon\, \xi)|| \wedge \phi(a)\wedge\psi(b) : (i,\phi)\times(j,\psi)\to(\Omega,v_\Omega)}$$

Les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de l'autre.

Vérifions le dans un sens ; en montrant :

$$\omega \asymp ||\exists \xi(\xi \asymp [x|\theta(x,b,||v_1||)] \wedge \psi(b) \quad \wedge a \,\varepsilon\, \xi)|| \wedge \phi(a)\wedge\psi(b) \leftrightarrows \theta(a,b,\omega)^{\{a,b,\omega\}}$$

La relation de gauche est équivalente à $\omega \asymp ||\theta(a,b,||v_1||)|| \wedge \phi(a)\wedge\psi(b)$

On a :

$$\dfrac{\dfrac{\theta(a,b,\omega)\wedge \omega \asymp ||v_1|| \vdash \theta(a,b,||v_1||)^{\{a,b,\omega\}}}{\theta(a,b,\omega)\wedge \varepsilon\,\varepsilon_1\omega \vdash \varepsilon\,\varepsilon_1||\theta(a,b,||v_1||)^{\{a,b,\omega,\varepsilon\}}} \qquad \dfrac{\theta(a,b,\omega)\wedge\theta(a,b,||v_1||)\vdash \omega\asymp||v_1||^{\{a,b,\omega\}}}{\theta(a,b,\omega)\wedge\varepsilon\,\varepsilon_1||\theta(a,b,||v_1||)||\vdash\varepsilon\,\varepsilon_1\omega^{\{a,b,\omega,\varepsilon\}}}}{\theta(a,b,\omega)\vdash\omega\asymp||\theta(a,b,||v_1||)||^{\{a,b,\omega\}}}$$

et, en réutilisant la dernière inégalité :

$$\dfrac{\phi(a)\wedge\psi(b)\vdash\exists\omega\,\theta(a,b,\omega)^{\{a,b\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\theta(a,b,\omega_1)\vdash\omega_1\asymp||\theta(a,b,||v_1||)||^{\{a,b,\omega_1\}}}{\vdots}}{\theta(a,b,\omega_1)\wedge\omega_2\asymp||\theta(a,b,||v_1||)||\vdash\theta(a,b,\omega_2)^{\{a,b,\omega_1,\omega_2\}}}}{(\exists\omega\,\theta(a,b,\omega)\wedge\omega_2\asymp||\theta(a,b,||v_1||)||\vdash\theta(a,b,\omega_2)^{\{a,b,\omega_2\}}}}{\omega_2\asymp||\theta(a,b,||v_1||)||\wedge\phi(a)\wedge\psi(b)\vdash\theta(a,b,\omega_2)^{\{a,b,\omega_2\}}}$$

Ceci achève la preuve que $\mathcal{S}(\underline{C},\mathcal{R})$ est un topos.

<u>Proposition</u>

Le morphisme $(F,\alpha) : (\underline{C},\mathcal{R}) \longrightarrow (\mathcal{S}(\underline{C},\mathcal{R}), \mathrm{Sub})$

défini par :

* $F(i) = (i, v_i)$ $\quad F(t : i \to j) = (i,v_i) \xrightarrow{\overline{b^j \asymp t(a^i)}} (j,v_j)$
* $\alpha(\phi) = (i,\phi) \rightarrowtail \xrightarrow{\overline{\phi(a_1)\wedge a_1\asymp a_2}} (i,v_i)$ pour $\phi \in \mathcal{R}(i)$ est fidèle.

<u>Preuve</u> : Si

$$\begin{tikzcd}
(i,\phi) \arrow[rr, "\overline{\theta}"] \arrow[dr, "\overline{\phi(a_1)\wedge a_1 \asymp a_3}"'] & & (i,\psi) \arrow[dl, "\overline{\psi(a_2)\wedge a_2 \asymp a_3}"] \\
& (i,v_i) &
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif

on a $\phi(a_1) \wedge a_1 \asymp a_3 \dashv\vdash \exists x\ (\theta(a_1,x) \wedge \psi(x) \wedge x \asymp a_3)^{\{a_1,a_3\}}$

$$\dfrac{\dfrac{\phi(a_1)\wedge a_1 \asymp a_3 \vdash \exists x(\theta(a_1,x)\wedge \psi(x)\wedge x \asymp a_3)^{\{a_1,a_3\}} \qquad \dfrac{\theta(a_1,a_2)\wedge\psi(a_2)\wedge a_2 \asymp a_3 \vdash \psi(a_3)^{\{a_1,a_2,a_3\}}}{\exists x(\theta(a_1,x)\wedge\psi(x)\wedge x \asymp a_3)\vdash \psi(a_3)^{\{a_1,a_3\}}}}{\phi(a_1)\wedge a_1 \asymp a_3 \vdash \psi(a_3)^{\{a_1,a_3\}}}}{\phi(a_3) \vdash \psi(a_3)^{\{a_3\}}}$$

<u>Remarque</u> : La construction de $\mathcal{S}\ (\underline{C}, \mathcal{R})$ fournit un adjoint à gauche (plus exactement, une solution du problème universel aux isomorphismes naturels près) aux inclusions :

$$\underline{\text{Reg}} \hookrightarrow \underline{\text{Reg Form}}$$

$$\underline{\text{Log}} \hookrightarrow \underline{\text{Log form}}$$

$$\underline{\text{Top}} \hookrightarrow \underline{\text{Top Form}}$$

Si on a un morphisme $(G,\beta) : (\underline{C}, \mathcal{R}) \longrightarrow (\underline{\varepsilon}, \text{Sub})$ on définit $\overline{G} : \mathcal{S}\ (\underline{C}, \mathcal{R}) \longrightarrow \underline{\varepsilon}$ de la façon suivante :

* $\overline{G}(i,\phi)$ est la source de $\rightarrowtail^{\beta(\phi)} G(i)$.
* Soit $\overline{\theta} : (i,\phi) \longrightarrow (j,\psi)$. $\overline{G}(i\times j,\theta)$ est un sous objet de $\overline{G}(i,\phi) \times \overline{G}(j,\psi)$, et la flèche $\overline{G}(i\times j,\theta) \longrightarrow \overline{G}(i,\phi)$ est un isomorphisme.
  Ceci donne la flèche $\overline{G}(\overline{\theta}) : \overline{G}(i,\phi) \longrightarrow \overline{G}(i,\psi)$.

Chapitre IV - Sémantique à valeur dans des "vraies catégories"

1) Le système de déduction est correct

La sémantique à valeur dans les "vraies catégories" telles que les catégories à $\varprojlim$ finies, les catégories régulières, les logos, les topos est un cas particulier de la sémantique à valeur dans les catégories avec déduction présentée au chapitre II, §3. Donc, on a aussi la :

Proposition

Le système de déduction
- i) tronqué en $v, \wedge, \asymp$
- ii) tronqué en $v, \wedge, \asymp, \exists$
- iii) tronqué au 1er ordre
- iv) entier

est correct pour la sémantique à valeur dans les :

- i) catégories à $\varprojlim$ finies
- ii) catégories régulières
- iii) logos
- iv) topos

Ceci veut dire que les théorèmes d'une théorie $\mathcal{T}$ sont valides dans tous les modèles de $\mathcal{T}$.

2) Le système de déduction est complet

Soit $\mathcal{L}$ un langage
- i) qui ne comprend que les éléments $v, \wedge, \asymp$
- ii) " " " " " " $v, \wedge, \asymp, \exists$
- iii) du premier ordre
- iv) d'ordre supérieur

Soit $\mathcal{T}$ une théorie, exprimée dans le langage $\mathcal{L}$, pour le système de déduction tronqué aux éléments de $\mathcal{L}$. On a construit au chapitre II, §4 une catégorie avec déduction $\mathcal{D}(\mathcal{T})$. Considérons $\mathcal{Y}(\mathcal{D}(\mathcal{T}))$ (cf. chapitre III). C'est
- i) une catgéorie à $\varprojlim$ finies
- ii) une catégorie régulière
- iii) un logos
- iv) un topos

Le modèle canonique de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{T})$ induit par le morphisme $(F,\alpha) : \mathcal{D}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{D}(\mathcal{T}))$ un modèle de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{D}(\mathcal{T}))$. Comme (F,α) est fidèle, on a encore que les seuls séquents de $\mathcal{L}$ valides dans ce modèle de $\mathcal{T}$ sont les théorèmes de $\mathcal{T}$.

<u>Théorème</u> Le système de déduction

i) tronqué en $\vee, \wedge, \asymp$

ii) tronqué en $\vee, \wedge, \asymp, \exists$

iii) tronqué en 1er ordre

iv) entier

est complet pour la sémantique à valeur dans les :

i) catégories à $\varprojlim$ finies

ii) catégories régulières

iii) logos

iv) topos

Les séquents valides dans tout modèle de $\mathcal{T}$ sont juste les théorèmes de $\mathcal{T}$.