UNE APPROCHE LOGIQUE DES THEORIES DEFINISSABLES PAR LIMITES PROJECTIVES FINIES

Michel Coste

MARS 1976

INTRODUCTION

Le premier but de ce travail est de revenir sur un point de [Co2] . Le "cadre logique" que j'associais aux catégories à $\varprojlim$ finies était composé de vrai, de la conjonction et de l'égalité. Ce cadre est insuffisant pour décrire ce qui se passe dans ces catégories. Par exemple il ne permet pas de formuler la théorie des catégories alors qu'on peut dire ce qu'est une catégorie interne à une catégorie à $\varprojlim$ finies. Cette insuffisance réside dans le fait que l'on ne peut pas en général associer à une catégorie $\mathbb{C}$ à $\varprojlim$ finies une théorie $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ dans ce cadre logique de telle façon qu'il y ait correspondance entre foncteurs exacts à gauche de source $\mathbb{C}$ et modèles de $\mathcal{T}(C)$.

J. Bénabou m'a fait remarquer que la définition correcte des "catégories à $\varprojlim$ finies formelles" (voir [Co1]) comprenait la "quantification existentielle le long des monomorphismes". Ceci correspond tout simplement au fait que si le composé $A \rightarrowtail B \xrightarrow{f} C$ est mono, le sous objet $A \rightarrowtail B$ a bien une image par f . Le travail repose sur la formalisation de cette idée.

Le "$\exists!$" correspond à la quantification existentielle le long des monos de la même façon que le "$\exists$" correspond à la quantification existentielle le long des flèches. La notation $\exists!$ présente peut-être un risque d'induire en erreur parce qu'elle ne correspond pas vraiment à l'usage qui veut que $\exists! x\ A(x)$ abrège $\exists x\ \forall y\ (A(y) \leftrightarrow x = y)$. Ici le $\exists!$ se présente plutôt comme un $\exists$ ordinaire mais que l'on a le droit d'écrire seulement quand on est assuré de l'unicité.

Il est donc nécessaire de prendre des précautions dans la description des "$\exists!$-théories" : Il faut savoir quelles formules on a le droit d'écrire. Passé cette difficulté, le reste du traitement relève d'une technique qui est maintenant bien au point : Des exemples de construction de catégories dont les objets sont les formules d'une théorie et les flèches les classes d'équivalence de relations prouvablement fonctionnelles de la théorie figurent sous des formes variées (on passe parfois par l'intermédiaire de formulations catégoriques des théories) et dans des contextes différents (topos élémentaires, catégories régulières,...) dans [Vo], [Di], [Be 1 et 2], [Fo], [Co2], [CC], [Bo].

L'idée fondamentale que beaucoup de personnes ont contribué à dégager est que les théories formulées dans un certain cadre logique sont des présentations (au sens de présentation de groupe, par exemple) de catégories d'un certain genre. Ici, étant donnée une $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$ on construit une catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ et étant donnée une catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$ on construit une $\exists!$-théorie $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ de telle façon que les modèles de $\mathbb{T}$ sont à équivalence près les foncteurs exacts à gauche de source $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ et que $\mathbb{C}$ est équivalente à $\mathcal{E}(\mathcal{T}(\mathbb{C}))$.

De la même façon que l'on peut utiliser les points d'un topos cohérent, on se sert des foncteurs Hom(T,-) pour montrer essentiellement la complétude des $\exists!$-théories pour leurs modèles ensemblistes. Ceci pourrait aussi être obtenu par un théorème d'élimination de coupures (voir [CC]) .

Enfin l'introduction des présentations des modèles ensemblistes d'une $\exists!$-théorie permet de s'apercevoir que la catégorie $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ que l'on fabrique est (équivalente à) l'opposée de celle des modèles de présentation finie de $\mathbb{T}$. (Il fallait bien s'y attendre). La comparaison avec les résultats de Gabriel et Ulmer [GU] montre en quoi les objets de présentation finie d'une catégorie localement de présentation finie sont effectivement de présentation finie au sens logique.

On connaît déjà plus ou moins une formulation logique des théories définissables par $\varprojlim$ finies : Voir Lawvere [La] . Il y a dans des papiers de Freyd [Fr 1 et 2] des remarques sur ces théories qu'il appelle "essentiellement algébriques". Mais je ne connais pas de traitement systématique du sujet. L'article de Keane [Ke] concerne un sujet voisin mais différent : Les théories qu'il considère sont celles dont il est question au début de cette introduction, c.a.d. celles formulées avec le vrai, la conjonction et l'égalité.

On peut se demander pourquoi je n'ai pas adopté l'approche ordinaire qui consiste à considérer des symboles fonctionnels partiels dont le domaine de définition est donné par des équations portant sur les symboles précédemment introduits (Bénabou pensait que cette dernière méthode n'était pas la mieux adaptée, et c'est son idée sur les quantifications existentielles le long des monos qui a conduit à cette autre approche). Le premier avantage de l'introduction du $\exists!$ est que cela permet un traitement qui est jusque dans les détails techniques parfaitement semblable à celui qui concerne les catégories régulières ou les topos élémentaires par exemple.

Il y a à priori des inconvénients : l'utilisation du quantificateur $\exists!$ risque de masquer le caractère "essentiellement algébrique" des théories étudiées, et son maniement n'est pas usuel puisque la possibilité d'écrire certaines formules repose sur des déductions de la théorie. Mais l'utilisation des symboles fonctionnels partiels, si elle est commode et largement répandue pour l'usage courant, ne relève pas non plus de traitement logique ordinaire : Ainsi par exemple Freyd [Fr 2] utilise des symboles $=$, $\preceq$ et $\asymp$ pour indiquer quand les termes de l'égalité sont définis. Si l'on veut se ramener à un traitement logique ordinaire, il faut considérer les graphes des fonctions partielles. Pour pouvoir le faire sans sortir d'un cadre logique adapté aux catégories à $\varprojlim$ finies, il faut bien quelque chose comme $\exists!$.

On demande d'habitude que les domaines de définition des symboles fonctionnels partiels soient donnés par un ensemble fini de formules atomiques (ce sont des "variétés algébriques"). Quand on pense aux catégories à $\varprojlim$ finies, ceci n'est dans le fond pas très naturel : on peut envisager la théorie d'une fonction partielle à domaine non défini, même si cela neprésente aucun intérêt ; doit on alors, pour parler du domaine de définition de cette fonction, introduire un symbole relationnel ad hoc ? De ce point de vue, la condition posée sur le domaine de définition des symboles fonctionnels partiels paraît motivée par le besoin de décrire ces domaines dans le langage. Justement, le $\exists!$ permet de décrire de tels domaines : $A(x,y)$ est fonctionnelle en x ssi on a le droit d'écrire $\exists!\, x\, A(x,y)$, et cette formule représente le domaine de définition de la fonction partielle.

Poursuivant cette idée, on s'aperçoit qu'il ne suffit que les symboles fonctionnels partiels du langage soient définis sur des "variétés algébriques" pour que l'on puisse décrire tout ce que l'on veut dans le langage sans $\exists!$. Considérons la théorie des anneaux commutatifs unitaires formulée de manière habituelle. Dans une catégorie à $\varprojlim$ finies, on sait construire le sous objet $U \rightarrowtail A$ des unités d'un anneau A . Si on n'emploie pas le $\exists!$ tout ce que l'on peut décrire dans le langage est U en tant que sous objet de $A \times A$, par la formule $x \times y = 1$. Avec $\exists!$, $U \rightarrowtail A$ est représenté par la formule $\exists! y\; x \times y = 1$. On rejoint sur cet exemple la remarque fondamentale de Bénabou : $\exists!$ est le reflet au niveau du langage du fait que l'on peut considérer U soit comme sous objet de $A \times A$, soit comme sous-objet de A puisque le composé $U \rightarrowtail A \times A \xrightarrow[1^e \text{ proj.}]{} A$ est mono.

Quoiqu'il en soit on peut facilement passer des théories "avec symboles fonctionnels partiels" aux $\exists!$ théories. Il faut signaler que cette traduction préserve et reflète la notion de présentation finie.

I - DESCRIPTION DES $\exists!$ - THEORIES

Les $\exists!$-théories sont les théories qui peuvent s'écrire dans un calcul de séquents à l'aide des symboles v, $,$ $=$ et $\exists!$. On n'a le droit d'écrire la formule $\exists! x\, A(x)$ que si on a la preuve que x dépend fonctionnellement des autres variables libres de A. Pour faire les choses correctement, il faut définir <u>en même temps</u> les formules et les théorèmes de la théorie.

Dans tout ce qui suit, les suites finies comprennent la suite vide.

a) Le langage

On se donne un langage comprenant un ensemble de sortes de variables (partout où cela est sans importance, on supposera qu'il n'y a qu'une sorte), un ensemble de symboles fonctionnels, un ensemble de symboles relationnels. On utilise les symboles v (pour vrai), $\wedge$, $=$ (une égalité pour chaque sorte de variables) et $\exists!$; v et $=$ sont traités comme symboles relationnels distingués. On supposera que tous les problèmes avec les noms des variables sont réglés par un moyen adéquat.

Les <u>préformules</u> du langage se construisent ainsi :

- Les formules atomiques sont des préformules.
- Si A et B sont des préformules, $A \wedge B$ est une préformule.
- Si A est une préformule et x une variable, $\exists! x\, A$ est une préformule.

Un <u>préséquent</u> est une expression $\Gamma \overset{V}{\vdash} A$ où :

- Γ est une suite finie de préformules.
- A est une préformule.
- V est une suite finie et sans répétition de variables où figurent toutes les variables libres de Γ et de A. On n'écrira pas V quand il ne comprend que les variables libres des préformules du préséquent ou quand il est clairement imposé par le contexte. Sur l'utilité de cette suite de variables, voir [Col] ou [La]. En gros, elle est là pour rendre compte de ce qui se passe avec les réalisations "vides".

b) Le système de déduction

Axiomes logiques : $A \vdash A$ (A atomique)

$$\vdash x = y \qquad x = y \vdash y = x \qquad x = y,\ y = z \vdash x = z$$

$$A(x),\ x = y \vdash A(y) \quad (A \text{ atomique})$$

$$\vdash v$$

Règles logiques :

$$\frac{\Gamma \overset{V}{\vdash} A \qquad \Gamma \overset{V}{\vdash} B}{\Gamma \overset{V}{\vdash} A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A \overset{V}{\vdash} C}{\Gamma, A \wedge B \overset{V}{\vdash} C} \qquad \frac{\Gamma, B \overset{V}{\vdash} C}{\Gamma, A \wedge B \overset{V}{\vdash} C}$$

$$\frac{\Gamma \overset{V}{\vdash} A(s)}{\Gamma \overset{V}{\vdash} \exists!x\ A(x)} \qquad \frac{\Gamma, A(x) \overset{V,x}{\vdash} B}{\Gamma, \exists!x\ A(x) \overset{V}{\vdash} B}$$

(s terme) (x ne figure pas dans V et n'est variable libre ni de Γ ni de B)

Règle structurale :

$$\frac{\Gamma \overset{V}{\vdash} A}{\Gamma' \overset{V'}{\vdash} A}$$

quand toute préformule de Γ figure dans Γ' et toute variable de V dans V'

Règle de substitution :

$$\frac{\Gamma(x) \overset{V,x}{\vdash} A(x)}{\Gamma(s(x_1,\ldots,x_n)) \overset{V,x_1,\ldots,x_n}{\vdash} A(s(x_1,\ldots,x_n))}$$

(s terme dont les variables sont $x_1,\ldots,x_n$).

Règle de coupure :

$$\frac{\Gamma \overset{V}{\vdash} A \qquad \Gamma, A \overset{V}{\vdash} B}{\Gamma \overset{V}{\vdash} B}$$

(Dans toutes les règles V est n'importe quelle suite qui convient).

c) $\exists!$-Théorie

Une $\exists!$-préthéorie Π estla donné d'un ensemble de préséquents : les préaxiomes propre de Π.

On construit simultanément les formules et les théorèmes de Π au moyen des règles suivantes :

- Une formule atomique est une formule de Π.
- Si A et B sont des formules de Π, $A \wedge B$ est une formule de Π.
- Si $A(x)$ est une formule de Π et si $A(x), A(x') \vdash x = x'$ est un théorème de Π, $\exists!\, x\, A(x)$ est une formule de Π.
- Si $\Gamma \vdash A$ est un axiome logique, c'est un théorème de Π.
- Si $\Gamma \vdash A$ est un préaxiome propre de Π dont toutes les préformules sont des formules de Π, c'est un théorème de Π.
- Si $\Gamma \vdash A$ est obtenu à partir de théorèmes de Π par l'application d'une règle et si toutes ses préformules sont des formules de Π, c'est un théorème de Π. (Les seules règles qui posent problème sont les règles pour $\exists!$ et la règle structurale).

On appelle séquent (resp. axiome) de Π un présequent (resp. preaxiome) qui n'est composé que de formules de Π. Une $\exists!$- théorie est une $\exists!$-préthéorie dont tous les préaxiomes sont des axiomes. Une notation : $\Gamma \overset{V}{\underset{\Pi}{\vdash}} A$ "$\Gamma \overset{V}{\vdash} A$ est un théorème de Π".

d) Remarques

1) Toute formule d'une $\exists!$-théorie est équivalente à une formule de genre $\exists!\, x_1 \ldots \exists!\, x_n\, A$ où A est conjonction de formules atomiques.

2) Tout séquent est déductivement équivalent à un séquent du genre $B_1, \ldots, B_\rho \overset{V}{\vdash} \exists!\, x_1 \ldots \exists!\, x_n\, A$ où A est conjonction de formules atomiques et les B_i formules atomiques.

II - $\exists!$-THEORIES ET CATEGORIES A $\varprojlim$ FINIES

On introduit les notions de réalisation d'un $\exists!$-langage et de modèle d'une $\exists!$-théorie dans une catégorie à $\varprojlim$ finies. On construit la catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathcal{C}(\Pi)$ associée à une $\exists!$-théorie Π. On montre qu'il y a équivalence entre les modèles de Π et les foncteurs exacts à gauche de source $\mathcal{C}(\Pi)$. La considération des foncteurs représentables de $\mathcal{C}(\Pi)$ dans $\mathbb{E}ns$ donne un théorème de complétude des $\exists!$-théories pour leurs modèles ensemblistes. On associe à une petite catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$ une $\exists!$-théorie $\mathcal{T}(\mathbb{C})$, et on montre l'équivalence de $\mathbb{C}$ et de $\mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathbb{C}))$. Enfin on donne une construction plus simple de $\mathcal{C}(\Pi)$ quand la formulation de Π ne nécessite pas $\exists!$.

a) Modèle d'une $\exists!$-théorie Π dans unecatégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$

Une <u>réalisation</u> $\mathcal{R}$ du langage de Π dans $\mathbb{C}$ est l'interprétation

- de chaque sorte i par un objet $\mathcal{R}(i)$
- de chaque symbole fonctionnel $f : i_1,\dots,i_n \to j$ par une flèche

$$\mathcal{R}(f) : \mathcal{R}(i_n) \times \dots \times \mathcal{R}(i_n) \longrightarrow \mathcal{R}(j)$$

- de chaque symbole relationnel r de signature $(i_1,\dots,i_n)$ par un sous objet $\mathcal{R}(r) \rightarrowtail \mathcal{R}(i_1) \times \dots \times \mathcal{R}(i_n)$.

Si V est une suite de variable (toujours sans répétition), on notera $\mathcal{R}(V)$ le produit des interprétations des sortes des variables de V effectué dans l'ordre de la suite.

On va maintenant définir les <u>préformules interprétables</u> dans $\mathcal{R}$ et, quand A est une préformule interprétable et V une suite de variables contenant les variables libres de A, construire l'<u>interprétation</u> $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \rightarrowtail \mathcal{R}(V)$ de <u>la formule A relativement à V</u> :

- Si A est une formule atomique, A est interprétable et $\mathcal{R}(A\ ;\ V)$ se construit comme d'habitude (voir par exemple [Col]).
- Si A et B sont interprétables, $A \wedge B$ l'est aussi et $\mathcal{R}(A \wedge B\ ;\ V) = \mathcal{R}(A\ ;\ V) \cap \mathcal{R}(B\ ;\ V)$.

- Si A est interprétable et si le composé suivant est un mono :

$$\mathcal{R}(A\ ;\ V_o, x) \rightarrowtail \mathcal{R}(V_o, x) \xrightarrow[\text{proj. can.}]{} \mathcal{R}(V_o)$$

(où V_o, x est une suite qui énumère sans répétition l'ensemble des variables libres de A auquel on rajoute x quand cette variable n'apparait pas dans A ; V_o énumèreles variables libres de A sauf x),

$\exists! x\ A$ est interprétable et $\mathcal{R}(\exists! x\ A\ ;\ V) \rightarrowtail \mathcal{R}(V)$

est le composé $\mathcal{R}(A\ ;\ V,x) \rightarrowtail \mathcal{R}(V,x) \xrightarrow[\text{proj. can.}]{} \mathcal{R}(V)$

(x ne figure pas dans V).

Un préséquent $A_1, \ldots, A_n \overset{V}{\vdash} B$ est <u>valide</u> dans $\mathcal{R}$ quand toutes ses préformules sont interprétables et $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{R}(A_i\ ;\ V) \subset \mathcal{R}(B\ ;\ V)$.

Un <u>modèle</u> de $\mathbb{T}$ est une réalisation dans laquelle tous les axiomes sont valides.

<u>Remarque</u>

On a dans ce contexte le fait que "l'existence unique entraîne l'existence globale" : Si $A \overset{V}{\vdash} \exists! x\ B$ est valide, il existe une flèche unique $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \xrightarrow{f} \mathcal{R}(x)$ telle que la flèche $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \longrightarrow \mathcal{R}(V,x) = \mathcal{R}(V) \times \mathcal{R}(x)$ donnée par $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \rightarrowtail \mathcal{R}(V)$ et f factorise à travers $\mathcal{R}(B\ ;\ V,x) \rightarrowtail \mathcal{R}(V,x)$; cette factorisation induit un isomorphisme $\mathcal{R}(A\ ,\ V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(B\ ;\ V,x)$.

<u>Proposition</u> : Les formules de $\mathbb{T}$ sont interprétables dans tout modèle de $\mathbb{T}$.
Les théorèmes de $\mathbb{T}$ sont valides dans tout modèle de $\mathbb{T}$.

La preuve se fait par induction sur la construction simultanée des formules et des théorèmes.

- Si A est interprétable et si le composé suivant est un mono :

$$\mathcal{R}(A\ ;\ V_{o'}x) \rightarrowtail \mathcal{R}(V_{o'}x) \xrightarrow[\text{proj. can.}]{} \mathcal{R}(V_o)$$

(où $V_{o'}x$ est une suite qui énumère sans répétition l'ensemble des variables libres de A auquel on rajoute x quand cette variable n'apparait pas dans A ; V_o énumèreles variables libres de A sauf x),

$\exists!x\ A$ est interprétable et $\mathcal{R}(\exists!x\ A\ ;\ V) \rightarrowtail \mathcal{R}(V)$

est le composé $\mathcal{R}(A\ ;\ V,x) \rightarrowtail \mathcal{R}(V,x) \xrightarrow[\text{proj. can.}]{} \mathcal{R}(V)$

(x ne figure pas dans V).

Un préséquent $A_1, \ldots, A_n \overset{V}{\vdash} B$ est <u>valide</u> dans $\mathcal{R}$ quand toutes ses préformules sont interprétables et $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{R}(A_i\ ;\ V) \subset \mathcal{R}(B\ ;\ V)$.

Un <u>modèle</u> de $\mathbb{T}$ est une réalisation dans laquelle tous les axiomes sont valides.

<u>Remarque</u>

On a dans ce contexte le fait que "l'existence unique entraîne l'existence globale" : Si $A \overset{V}{\vdash} \exists!x\ B$ est valide, il existe une flèche unique $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \xrightarrow{f} \mathcal{R}(x)$ telle que la flèche $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \longrightarrow \mathcal{R}(V,x) = \mathcal{R}(V) \times \mathcal{R}(x)$ donnée par $\mathcal{R}(A\ ;\ V) \rightarrowtail \mathcal{R}(V)$ et f factorise à travers $\mathcal{R}(B\ ;\ V,x) \rightarrowtail \mathcal{R}(V,x)$; cette factorisation induit un isomorphisme $\mathcal{R}(A\ ,\ V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}(B\ ;\ V,x)$.

<u>Proposition</u> : Les formules de $\mathbb{T}$ sont interprétables dans tout modèle de $\mathbb{T}$.
Les théorèmes de $\mathbb{T}$ sont valides dans tout modèle de $\mathbb{T}$.

La preuve se fait par induction sur la construction simultanée des formules et des théorèmes.

b) Catégorie à $\varprojlim$ finies associée à une $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$

On associe une fois pour toutes à chaque n-uple de sortes $(i_1,\dots,i_n)$ un n-uple de variables distinctes $(x_1,\dots,x_n)$ tel que x_k soit de sorte i_k. On abrégera les suites finies à l'aide de notations vectorielles.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ la catégorie dont :

- les objets sont les $(A\ ;\ \vec{i})$ où $\vec{i}$ est une suitefinie de sortes et A une formule de $\mathbb{T}$ dont les variables libres sont parmi la suite $\vec{x}$ associée à $\vec{i}$,

- les flèches $(A\ ;\ \vec{i}) \longrightarrow (B\ ;\ \vec{j})$ sontles classes d'équivalence de formules C de $\mathbb{T}$ dont les variables libres sont parmi la suite $\vec{x}$, $\vec{y}$ associée à $\vec{i}$, $\vec{j}$ et qui sont prouvablement fonctionnelles de domaine A et d'image incluse dans B , c.a.d. telles que :

$$C(\vec{x}\ ,\ \vec{y}_1)\ ,\quad C(\vec{x}\ ,\ \vec{y}_2) \underset{\mathbb{T}}{\vdash} \vec{y}_1 = \vec{y}_2$$

$$C(\vec{x}\ ,\ \vec{y}) \underset{\mathbb{T}}{\vdash} B(\vec{y})$$

$$\exists!\ y\ C(\vec{x}\ ,\ \vec{y}) \underset{\mathbb{T}}{\dashv\vdash} A(\vec{x}) \quad ,$$

modulo l'équivalence $C \sim C'$ quand $C \underset{\mathbb{T}}{\dashv\vdash} C'$. On notera $\overline{C}$ la classe d'équivalence de C ,

- l'identité $(A\ ;\ \vec{i}) \longrightarrow (A\ :\ \vec{i})$ est $\overline{A(\vec{x}_1) \wedge \vec{x}_1 = \vec{x}_2}$ (si $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ est associé à $\vec{i}$, $\vec{i}$) ,

- la composé $(A\ ;\ \vec{i}) \xrightarrow{\overline{D}} (B\ :\ \vec{j}) \xrightarrow{\overline{E}} (C\ ;\ \vec{k})$ est $\overline{\exists!\ \vec{y}\ (D(\vec{x},\vec{y}) \wedge E(\vec{y},\vec{z}))}$ (si $\vec{x}$, $\vec{z}$ est associé à $\vec{i}$, $\vec{k}$) .

<u>Proposition</u> : $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est à $\varprojlim$ finies. Si $\mathbb{C}$ est à $\varprojlim$ finies il y a équivalence entre la catégorie <u>Mod</u> $(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ des modèles de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$ et <u>Lex</u> $(\mathcal{C}(\mathbb{T})\ ,\ \mathbb{C})$ des foncteurs exacts à gauche de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ dans $\mathbb{C}$.

Dans le modèle canonique de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, une préformule est interprétable ssi c'est une formule de $\mathbb{T}$ et un préséquent est valide ssi c'est un théorème de $\mathbb{T}$.

La démonstration est longue et sans surprise. Voici les constructions utilisées (on ne précise plus les suites de variables associées aux suites de sortes) :

- l'objet terminal de $\mathcal{E}(\Pi)$ est $(v\ ;\ \emptyset)$ et la flèche terminale de source $(A\ ;\ \vec{i})$ est représentée par A. Le produit de $(A\ ;\ \vec{i})$ et de $(B\ ;\ \vec{j})$ est $(A \wedge B\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ muni des projections

$$\overline{A(\vec{x}_1) \wedge B(\vec{y}) \wedge \vec{x}_1 = \vec{x}_2} : (A \wedge B\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}) \longrightarrow (A\ ;\ \vec{i}) \quad \text{et}$$

$$\overline{A(\vec{x}) \wedge B(\vec{y}_1) \wedge \vec{y}_1 = \vec{y}_2} : (A \wedge B\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}) \longrightarrow (B\ ;\ \vec{j}).$$

Le noyau de $(A\ ;\ \vec{i}) \underset{\overline{D}}{\overset{\overline{C}}{\rightrightarrows}} (B\ ;\ \vec{j})$ est

$$(\exists!\vec{y}(C(\vec{x},\vec{y}) \wedge D(\vec{x},\vec{y}))\ ;\ \vec{i}) \xrightarrow{\overline{\exists!y(C(\vec{x}_1,\vec{y}) \wedge D(\vec{x}_1,\vec{y})) \wedge \vec{x}_1 = \vec{x}_2}} (A\ ;\ \vec{i})\ .$$

Montrons par exemple ce dernier point : Soit $(E\ ;\ \vec{k}) \xrightarrow{\overline{F}} (A\ ;\ \vec{i})$ tel que $\overline{C} \circ \overline{F} = \overline{D} \circ \overline{F}$. Ceci veut dire que l'on a :

$$\exists!\vec{x}\ (F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y})) \underset{\Pi}{\vdash\!\dashv} \exists!x\ (F(\vec{z},\vec{x}) \wedge D(\vec{x},\vec{y}))$$

La déduction suivante montre que $\overline{F}$ factorise par le candidat-noyau (on saute des étapes) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(\vec{z},\vec{x}),F(\vec{z},\vec{x}_1) \vdash \vec{x} = \vec{x}_1}{\exists!\vec{x}(F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y})) \vdash \exists!\vec{x}_1(F(\vec{z},\vec{x}_1) \wedge D(\vec{x}_1,\vec{y}))} \quad \dfrac{F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y}),F(\vec{z},\vec{x}_1) \wedge D(\vec{x}_1,\vec{y}) \vdash D(\vec{x},\vec{y})}{F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y}),\ \exists!\vec{x}_1(F(\vec{z},\vec{x}_1) \wedge D(\vec{x}_1,\vec{y})) \vdash D(\vec{x},\vec{y})}}{F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y}) \vdash \exists!\vec{x}_1(F(\vec{z},\vec{x}_1) \wedge D(\vec{x}_1,\vec{y}))}}{F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y}) \vdash D(\vec{x},\vec{y})}}{F(\vec{z},\vec{x}) \wedge C(\vec{x},\vec{y}) \vdash C(\vec{x},\vec{y}) \wedge D(\vec{x},\vec{y})}}{F(\vec{z},\vec{x}),C(\vec{x},\vec{y}) \vdash \exists!\vec{y}(C(\vec{x},\vec{y}) \wedge D(\vec{x},\vec{y}))}}{F(\vec{z},\vec{x}),\ \exists!y\ C(\vec{x},\vec{y}) \vdash \exists!\vec{y}(C(\vec{x},\vec{y}) \wedge D(\vec{x},\vec{y}))}}{F(\vec{z},\vec{x}) \vdash \exists!\vec{y}\ (C(\vec{x},\vec{y}) \wedge D(\vec{x},\vec{y}))}$$

$$\dfrac{F(\vec{z},\vec{x}) \vdash A(\vec{x}) \qquad A(\vec{x}) \vdash \exists!\vec{y}C(\vec{x},\vec{y})}{F(\vec{z},\vec{x}) \vdash \exists!\vec{y}\ C(\vec{x},\vec{y})}$$

L'unicité de la factorisation est claire.

- Si $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$, on lui fait correspondre le foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\mathcal{F}((A;\vec{i})) = \mathcal{M}((A;\vec{x}))$ et $\mathcal{F}((A;\vec{i}) \xrightarrow{\overline{C}} (B;\vec{j})) =$ la flèche donnée par la relation fonctionnelle $\mathcal{M}(C\ ;\ \vec{x},\vec{y}) \rightarrowtail \mathcal{M}(A;\vec{x}) \times \mathcal{M}(B;\vec{y})$ (voir la remarque de la partie a). $\mathcal{F}$ est exact à gauche.
- Réciproquement si $\mathcal{F} : \mathcal{E}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est un foncteur exact à gauche, on lui fait correspondre le modèle $\mathcal{M}$ donné par $\mathcal{M}(i) = \mathcal{F}((v;i))$, $\mathcal{M}(f) = \mathcal{F}(\overline{f(\vec{x}) = \vec{y}})$, $\mathcal{M}(r) = \mathcal{F}(r(\vec{x})\ ;\ \vec{i})$.

On a bien sûr comme corollaire immédiat le :

<u>Théorème de complétude</u> : Une préformule est une formule ssi elle est interprétable et un préséquent est un théorème ssi il est valide dans tous les modèles de $\mathbb{T}$ dans des catégories à $\varprojlim$ finies.

Si $\mathbb{C}$ est à $\varprojlim$ finies, il est bien clair que les $\mathrm{Hom}(T,-)$ pour T objet de $\mathbb{C}$ forment une famille conservative pour les monos de foncteurs exacts à gauche de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}$ns . D'où le résultat suivant, bien plus intéressant que le précédent :

<u>Théorèmede complétude bis</u> : Une préformule est une formule de $\mathbb{T}$ ssi elle est interprétable et un préséquent est un théorème de $\mathbb{T}$ ssi il est valide dans tous les modèles ensemblistes de $\mathbb{T}$ (parmi les modèles ensemblistes, il y a éventuellement des modèles avec des univers vides).

Voici un autre corollaire que l'on peut paraphraser en disant que "dans une $\exists!$-théorie, l'existence entraîne la définissabilité" et qui n'est que la traduction de la trivialité suivante : une flèche de $\mathbb{C}$ à $\varprojlim$ finies dont l'image par tout foncteur exact à gauche de C dans $\mathbb{E}$ns est épi est un épi scindé.

<u>Proposition</u> : Soit $A(\vec{x},\vec{y})$ une formule de $\mathbb{T}$. On suppose que dans chaque modèle ensembliste $\mathcal{M}$ de $\mathbb{T}$, pour chaque suite d'individus $\vec{a}$ de $\mathcal{M}$, il existe une suite d'individus $\vec{b}$ de $\mathcal{M}$ telle que $A(\vec{a},\vec{b})$ soit vraie dans $\mathcal{M}$.

Alors il existe une formule $B(\vec{x},\vec{y})$ de $\mathbb{T}$ telle que :

$$B(\vec{x},\vec{y}_1)\ ,\ B(\vec{x},\vec{y}_2) \underset{\mathbb{T}}{\vdash} \vec{y}_1 = \vec{y}_2$$

$$\underset{\mathbb{T}}{\vdash} \exists!\vec{y}\ B(\vec{x},\vec{y})$$

$$B(x,y) \underset{\mathbb{T}}{\vdash} A(\vec{x},\vec{y})$$

(B est le graphe d'une fonction qui pour chaque $\vec{x}$ choisit $\vec{y}$ tel que $A(\vec{x},\vec{y})$).

<u>Preuve</u> : La flèche $(A\ ;\ \vec{i},\vec{j}) \longrightarrow (v\ ;\ \vec{i})$ est un épi scindé. Ceci veut dire qu'il existe une formule $C(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{y})$ telle que :

$$C(\vec{x},\ \vec{x}'_1,\ \vec{y}_1),\ \ C(\vec{x},\ \vec{x}'_2,\ \vec{y}_2) \underset{\mathbb{T}}{\vdash} \vec{x}'_1 = \vec{x}'_2 \wedge \vec{y}_1 = \vec{y}_2$$

$$\underset{\mathbb{T}}{\vdash} \exists!\vec{x}'\ \ \exists!\vec{y}\ \ C(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{y})$$

$$\vec{x} = \vec{x}'' \underset{\mathbb{T}}{\dashv\vdash} \exists!\vec{x}'\ \exists!\vec{y}\ ((C(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{y}) \wedge \vec{x}' = \vec{x}'')$$

Il suffit de prendre $C(\vec{x},\ \vec{x}',\ \vec{y})$ pour $B(\vec{x},\ \vec{y})$

c) <u>$\exists!$-Théorie associée à une petite catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$</u>

Soit $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ le langage dont l'ensembles des sortes est l'ensemble des objets de $\mathbb{C}$, l'ensemble des symboles fonctionnels l'ensemble des flèches de $\mathbb{C}$ (ce sont donc tous des symboles fonctionnels unaires) et qui n'a pas de symbole relationnel (sauf bien sur v et =). $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ a une réalisation évidente dans $\mathbb{C}$. On appelle $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ la $\exists!$-théorie dont les axiomes sont les préséquents valides dans cette réalisation, qui devient ainsi un modèle de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Ce modèle induit un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathcal{T}(\mathbb{C})) \longrightarrow \mathbb{C}$ exact à gauche.

<u>Proposition</u> : $\mathcal{F}$ est une équivalence de catégories.

<u>Preuve</u> : $\mathcal{F}$ est surjectif sur les objets. Il est fidèle parce que tous les préséquents valides dans le modèle sont des axiomes de $\mathcal{T}(\mathbb{C})$. $\mathcal{F}$ est plein :

Soient $i = \mathcal{F}(A\ ;\ i_1,\dots,i_n)$, $j = \mathcal{F}(B\ ;\ j_1,\dots,j_p)$ et f une flèche $i \longrightarrow j$. On a des monos :

$g = (g_1,\dots,g_n) : i \longrightarrow i_1\times\dots\times i_n$ et $h = (h_1,\dots,h_p) : j \longrightarrow j_1\times\dots\times j_p$.

La formule $\exists!x(g_1(x) = x_1 \wedge \dots \wedge g_n(x) = x_n \wedge h_1(f(x)) = y_1 \wedge\dots\wedge h_p(f(x)) = y_p)$ représente une flèche de $(A\ ;\ i_1,\dots i_n)$ dans $(B\ ;\ j_1,\dots j_p)$ dont l'image par $\mathcal{F}$ est f.

d) <u>Théories qui s'expriment avec $\vee$, $\wedge$, $=$</u>

Soit $\mathbb{T}_o$ une $\exists!$-théorie dont les axiomes n'utilisent que les symboles $\vee$, $\wedge$, $=$. On peut citer comme exemples de telles théories les théories algébriques au sens ordinaire, la théorie de l'ordre, la théorie des anneaux sans élément nilpotentnon trivial, etc ...

Soit $\mathcal{C}_o(\mathbb{T}_o)$ la catégorie dont :

- les objets sont les $(A\ ;\ \vec{i})$, où cette fois A est une formule de $\mathbb{T}_o$ écrite sans $\exists!$, c'est-à-dire une conjonction de formules atomiques.
- les flèches $(A\ ;\ i_1,\dots,i_n) \longrightarrow (B\ ;\ j_1,\dots,j_p)$ sont les classes d'équivalence de p-uples de termes $(t_1,\dots,t_p)$ dontles variables sont parmi la suite $(x_1,\dots,x_n)$ associée à $(i_1,\dots,i_n)$ et tels que $A(x_1,\dots,x_n) \underset{\mathbb{T}_o}{\vdash} B(t_1,\dots,t_p)$

pour la relation d'équivalence $(t_1,\dots,t_p) \sim (u_1,\dots,u_p)$ quand $A \underset{\mathbb{T}_o}{\vdash} \vec{t} = \vec{u}$.

<u>Proposition</u> : $\mathcal{C}_o(\mathbb{T}_o)$ est équivalente à $\mathcal{C}(\mathbb{T}_o)$

<u>Preuve</u> : On montre (voir [Co2]) que $\mathcal{C}_o(\mathbb{T}_o)$ est à $\varprojlim$ finies et satisfait la même propriété universelle que $\mathcal{C}(\mathbb{T}_o)$.

<u>Remarque</u> : On rejoint ici le travail de Keane [Ke] .

III - PRESENTATIONS

Tous les modèles considérés dans cette partie sont ensemblistes. On montre que toute $\exists!$-théorie possède un modèle initial. Ceci entraîne que pour une $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$ fixée, toute présentation engendre un modèle initial. Réciproquement tout modèle admet une présentation. On montre ensuite que $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est l'opposée de la catégorie des modèles de présentation finie de $\mathbb{T}$, et on fait le lien avec les résultats de Gabriel et Ulmer sur les catégories localement de présentation finie.

a) Modèle initial d'une $\exists!$-théorie

Proposition : Toute $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$ a un modèle initial $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ (unique à isomorphisme près).

Preuve : L'univers de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ est l'ensemble des expression $!x\ A$ (l'unique x tel que A) où x est une variable fixée une fois pour toute et où $\exists!x\ A$ est une formule close de $\mathbb{T}$ telle que $\vdash_{\mathbb{T}} \exists!x\ A$, modulo l'équivalence $!x\ A \sim !x\ B$ quand $\vdash_{\mathbb{T}} \exists!x\ (A \wedge B)$.

La réalisation du langage de $\mathbb{T}$ estainsi définie :

- Si f est un symbole fonctionnel n-aire, l'image des classes de $!x\ A_1(x), \ldots, !x\ A_b(x)$ par l'interprétation de f est représentée par $!x\ \exists!x_1 \ldots \exists!x_n (A_1(x_1) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n) \wedge f(x_1,\ldots,x_n) = x)$.

- Si r est un symbole relationnel n-aire, le n-uple des classes de $!x\ A_1(x), \ldots, !x\ A_n(x)$ vérifiera r quand

$$\vdash_{\mathbb{T}} \exists!x_1 \ldots \exists!x_n (A_1(x_1) \wedge \ldots \wedge A_n(x_n) \wedge r(x_1,\ldots,x_n)) .$$

$\mathcal{M}(\mathbb{T})$ est bien un modèle de $\mathbb{T}$. Ceci est clair quand on réalise qu'une formule A à n variables libres est vérifiée par les classes de $!x\ B_1(x), \ldots, !x\ B_n(x)$ ssi :

$$\vdash_{\mathbb{T}} \exists!x_1 \ldots \exists!x_n\ (B_1(x_1) \wedge \ldots \wedge B_n(x_n) \wedge A(x_1,\ldots,x_n))$$

Si $\mathcal{N}$ est un autre modèle de $\mathbb{T}$, l'unique morphisme de $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{N}$ est celui qui envoie la classe de $!x\ A$ sur l'unique individu de $\mathcal{N}$ qui vérifie A.

b) Présentations

Soit $\mathbb{T}$ une $\exists!$-théorie.

Une présentation $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{T}$ est la donnée d'un ensemble G de générateurs et d'un ensemble R de relations qui sont des formules atomiques closes de $\mathbb{T}$ à paramètres dans G .

Soit $\mathbb{T} \cup \mathcal{P}$ la théorie obtenue en ajoutant les générateurs de G comme constantes au langage de $\mathbb{T}$ et les relations comme nouveaux axiomes. Un modèle de $\mathbb{T}$ qui peut être enrichi en un modèle initial de $\mathbb{T} \cup \mathcal{P}$ est appelé modèle de présentation $\mathcal{P}$. On notera $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ "le" modèle de présentation $\mathcal{P}$.

Proposition : Tout modèle $\mathcal{M}$ admet une présentation .

Il suffit de prendre pour G l'ensemble des individus de $\mathcal{M}$ et pour R l'ensemble des formules atomiques closes de $\mathbb{T}$ à paramètres dans $\mathcal{M}$ et vraies dans $\mathcal{M}$. C'est le diagramme atomique de $\mathcal{M}$.

Remarque : La rédaction de ce qui précède a été modifiée d'après une suggestion de Bénabou, afin de dégager l'essentiel qui est l'existence du modèle initial et de faire apparaître que la notion de présentation pourrait être élargie en remplaçant les générateurs par des symboles fonctionnels ou relationnels quelconques et les relations par des axiomes quelconques.

c) Modèles de présentation finie

Définition : Un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathbb{T}$ est de présentation finie si il est de présentation $\mathcal{P}=(G,R)$ avec G et R finis.

Proposition : $\mathcal{C}(\mathbb{T})^{op}$ est équivalente à la catégorie des modèles de présentation finie de $\mathbb{T}$.

Notation : Si a est un générateur, on lui associe une variable $\underline{a}$ du langage de $\mathbb{T}$. Si A est une formule qui a des générateurs comme paramètres, $\underline{A}$ désignera le résultat de la substitution aux générateurs de leurs variables associées dans A.

<u>Preuve</u> : - Soit $\mathcal{P} = (\{a_1,\dots,a_n\},\{R_1,\dots,R_p\})$ une présentation finie. Soit $(i_1,\dots,i_n)$ la suite des sortes de $(a_1,\dots,a_n)$ et A la conjonction $R_1 \wedge \dots \wedge R_p$. A $\mathcal{P}$ on associe l'objet $(\underline{A}\ ;\ i_1,\dots,i_n)$ de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

- Soit $\mathcal{Q} = (\{b_1,\dots,b_q\},\ \{S_1,\dots,S_r\})$ une autre présentation finie, $(j_1,\dots,j_q)$ la suite de $(b_1,\dots,b_q)$ et B la conjonction $S_1 \wedge \dots \wedge S_r$. Un morphisme de $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ est la donnée de n éléments dans $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ vérifiant $R_1,\dots, R_p$ (ce sont les images des générateurs de $\mathcal{M}(\mathcal{P})$). Ceci revient donc à la donnée de $!x\ B_1(x), \dots, !x\ B_n(x)$ où $B_1,\dots, B_n$ sont à paramètres dans $\{b_1,\dots,b_q\}$ et

$$\vdash_{\mathbb{T}\cup\mathcal{Q}} \exists !x\ B_i(x)$$

$$\vdash_{\mathbb{T}\cup\mathcal{Q}} \exists!\ x_1 \dots \exists!\ x_n\ A(x_1,\dots,x_n) \wedge B_1(x_1) \wedge \dots \wedge B_n(x_n)$$

ce qui équivaut à :

$$\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q \vdash_{\mathbb{T}} \exists !x\ \underline{B}_i(x)$$

$$\underline{b}_1,\dots,\underline{b}_q \vdash_{\mathbb{T}} \exists !x_1 \dots \exists !x_n\ A(x_1,\dots,x_n) \wedge \underline{B}_1(x_1) \wedge \dots \wedge \underline{B}_n(x_n)$$

A une telle donnée on associe la flèche de $(\underline{B}\ ;\ \vec{j})$ dans $(\underline{A}\ ;\ \vec{i})$ représentée par $\underline{B} \wedge \underline{A} \wedge \underline{B}_1(\underline{a}_1) \wedge \dots \wedge \underline{B}_n(\underline{a}_n)$. Réciproquement si C représente une flèche de $(\underline{B}\ ;\ \vec{j})$ dans $(\underline{A}\ ;\ \vec{i})$, on lui associe la donnée $!x\ \exists !x_2 \dots \exists !x_n\ C(\vec{b}, x, x_2,\dots,x_n),\dots, !x\ \exists !x_1 \dots \exists !x_{n-1}\ C(\vec{b}, x_1, \dots, x_{n-1}, x)$. Il faut vérifier que les deux applications ainsi définies sont inverses l'une de l'autre. Il reste ensuite à voir que tout objet de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est atteint à isomorphisme près : Puisque toute formule de $\mathbb{T}$ est équivalente à une de la forme $\exists !\vec{y}\ A(\vec{x},\vec{y})$ où A est conjonction de formules atomiques, tout objet de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est isomorphe à un objet de la forme $(\exists !\vec{y}\ A(\vec{x},\vec{y})\ ;\ \vec{i})$ où A est comme précédemment. Ce dernier objet est isomorphe à $(A(\vec{x},\vec{y})\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$ qui est bien atteint.

Ce raisonnement montre aussi que l'on aurait pu se contenter, dans la construction de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, de prendre comme objets les $(A\ ;\ \vec{i})$ où A est conjonction de formules atomiques.

d) Comparaison avec les résultats de Gabriel et Ulmer

Rappel de défintion : Un objet A est de présentation finie si $\mathrm{Hom}(A,-)$ préserve les colimites cofiltrantes. Une catégorie localement de présentation finie est une catégorie complète et cocomplète possédant un système générateur $(P_i)_{i\in I}$ où les P_i sont de présentation finie et tels que pour toute flèche f , f est iso ssi pour tout i $\mathrm{Hom}(P_i,f)$ est iso.

Rappel de résultat : Une catégorie $\mathbb{A}$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Lex}(\mathbb{C}, \mathbb{E}\mathrm{ns})$ pour une petite catégorie $\mathbb{C}$ à $\varprojlim$ finies ssi elle est localement de présentation finie. Dans ce cas cette équivalence induit une équivalence entre la catégorie des objets de présentation finie de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}^{op}$.

Proposition : Une catégorie $\mathbb{A}$ est équivalente à la catégorie des modèles d'une $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$ ssi elle est localement de présentation finie. Dans ce cas cette équivalence induit une équivalence entre la catégorie des objets de présentation finie de $\mathbb{A}$ et la catégorie des modèles de présentation finie de $\mathbb{T}$.

IV - QUELQUES EXEMPLES D'ECRITURE

On précise de façon dont certaines notions peuvent s'écrire dans le formalisme introduit précédemment. On montre que les symboles fonctionnels partiels peuvent être introduits comme abréviation commode. On donne un procédé qui permet de passer d'un théorie "relative au corpus $(\varprojlim)$" (voir [Be3]) à une $\exists!$-théorie équivalente.

a) Ecriture de quelques propriétés définissables à l'aide de $\varprojlim$ finies dans une catégorie

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie à $\varprojlim$ finies. Si $\Gamma \overset{V}{\vdash} A$ est un préséquent de $\mathcal{L}(\mathbb{C})$, on note $\Gamma \overset{V}{\models} A$ quand il est valide dans la réalisation canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ (c'est à dire quand $\Gamma \underset{\mathcal{E}(\mathbb{C})}{\overset{V}{\vdash}} A$).

Une flèche $f : i \longrightarrow j$ est un mono ssi $f(x) = f(x') \models x = x'$.

C'est un iso quand en plus $\models \exists! x\ f(x) = y$.

L'objet i est initial ssi $\models x = x'$ et $\models \exists! x(v)$ (x, x' variables de sorte i).

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ j & & k \end{tikzcd}$$

est un produit ssi

$f(x) = f(x'),\ g(x) = g(x') \models x = x'$ et $\models \exists! x(f(x) = y \wedge g(x) = z)$.

Le diagramme $i \xrightarrow{f} j \underset{h}{\overset{y}{\rightrightarrows}} k$ est un noyau ssi

$f(x) = f(x') \models x = x'$ et $\exists! x\ f(x) = y \models\!\!\!\dashv g(y) = h(y)$.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & j \arrow[d, "f"] \\ k \arrow[r, "h"'] & \ell \end{tikzcd}$$

est un carré cartésien ssi

$e(x) = e(x'),\ g(x) = g(x') \models x = x'$ et $\exists! x(e(x) = y \wedge g(x) = z) \models\!\!\!\dashv e(y)=h(z)$.

b) Théories avec symboles fonctionnels partiels

Soit $\mathbb{T}$ une $\exists!$-théorie. Enrichir $\mathbb{T}$ avec un symbole fonctionnel partiel $f : i_1,\ldots,i_n \longrightarrow j$ consiste à ajouter au langage de $\mathbb{T}$ un symbole relationnel G_f (graphe de f) de signature $(i_1,\ldots,i_n, j)$ avec l'axiome : $G(\vec{x},y)$, $G(\vec{x},y') \vdash y = y'$.

Dire que f a pour domaine une formule $A(\vec{x})$ de $\mathbb{T}$ revient à dire que l'on ajoute les axiomes $\exists!y\, G(\vec{x},y) \vdash\!\dashv A(\vec{x})$.

Enfin si $B(y)$ est une formule (y de sorte j) , $B(f(t_1,\ldots,t_n))$ sera par définition équivalente à $\exists!y(B(y)\ G_f(t_1,\ldots,t_n, y))$.

Tout ceci permet d'utiliser les symboles fonctionnels partiels comme abréviation commode.

c) Exemples de $\exists!$-théories

- La théorie des catégories, formulée de façon habituelle avec deux sortes Ob (variables i, j, ...) et Fl (variables f, g, ...) , les symboles s (sources), b (but), Id (identité), le symbole fonctionnel partiel $- \circ -$ (composition).

  La formule $\mathrm{Iso}(f) : \exists!g(f\circ g = \mathrm{Id}(b(f)) \wedge g\circ f = \mathrm{Id}(s(f)))$ exprime que f est iso.

- La théorie des catégories à $\varprojlim$ finies avec en plus de ce qui précède :

  Une constante 1 pour l'objet terminal avec les axiomes

$s(f) = s(g),\ b(f) = 1,\ b(g) = 1 \vdash f = g$ et $\vdash \exists!f(s(f) = i \wedge b(f) = 1)$.

  Pour le produit fibré des symboles fonctionnels partiels

$- \underset{\bullet}{\times} - : \mathrm{Fl}, \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Ob}$ et $p_1, p_2 : \mathrm{Fl}, \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$ dont le domaine est donné par $b(f) = b(g)$ avec les axiomes

$$b(f) = b(g) \vdash (s(p_1(f,g)) = f\underset{\bullet}{\times}g) \wedge (s(p_2(f,g)) = f\underset{\bullet}{\times}g) \wedge (b(p_1(f,g)) = s(f)) \wedge (b(p_2(f,g)) = s(g))$$

$$b(f) = b(g) \vdash f \circ p_1(f,g) = g \circ p_2(f,g)$$

$$p_1(f,g) \circ e = p_1(f,g) \circ h \ , \ p_2(f,g) \circ e = p_2(f,g) \circ h \vdash e = h$$

$$f \circ e = g \circ h \vdash \exists! d \ (e = p_1(f,g) \circ d \wedge h = p_2(f,g) \circ d)$$

Dans cette théorie, on a les formules suivantes :

$\mathrm{Mono}(f)$: $p_1(f,f) = p_2(f,f)$ pour dire que f est un mono

$f \leqslant g$: $\exists! h(\mathrm{Mono}(f) \wedge \mathrm{Mono}(g) \wedge f = g \circ h)$ pour dire que le sous objet représenté par f est plus petit que celui représenté par g

$f \sim g$: $f \leqslant g \wedge g \leqslant f$ pour dire que f et g représentent le même sous objet.

- La théorie des catégories régulières avec en plus de ce qui précède un symbole fonctionnel $\mathrm{Im} : \mathrm{Fl} \longrightarrow \mathrm{Fl}$ et les axiomes

$$\vdash \mathrm{Mono}\ (\mathrm{Im}\ f) \ , \quad \vdash \exists! g \ f = \mathrm{Im}\ f \circ g$$

$$f = g \circ h \ , \ \mathrm{Mono}(g) \vdash \mathrm{Im}\ f \leqslant g$$

$$\vdash \mathrm{Im}\ p_1(f,g) \sim p_1(f, \mathrm{Im}\ g) \ .$$

- La théorie des topos élémentaires avec enplus des $\varprojlim$ finies et de l'exponentielle (voir comment la formuler), une constante t de sorte Fl et une Ω de sorte Ob et les axiomes

$$\vdash (s(t) = 1) \wedge (b(t) = \Omega) \quad p_1(f,t) \sim p_2(g,t) \vdash f = g$$

$$\mathrm{Mono}(f) \vdash \exists! g \ (f \sim p_1(g,t)) \ .$$

- La théorie des fibrations : On exprime facilement que l'on a deux catégories $\mathbb{E}$ et $\mathbb{B}$ et un foncteur $p : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{B}$ (au moyen de deux symboles p_{Ob} et p_{Fl}). Pour dire que p est fibrant, on ajoute un symbole fonctionnel partiel

$\mathrm{Cart} : \mathrm{Fl}_{\mathbb{B}} \ , \ \mathrm{Ob}_{\mathbb{E}} \longrightarrow \mathrm{Fl}_{\mathbb{E}}$ dont le domaine de définition est donné par $b_{\mathbb{B}}(u) = P_{\mathrm{Ob}}(X)$ et les axiomes

$$p_{\mathrm{Fl}}(f) = P_{\mathrm{Fl}}(g), \ \mathrm{Cart}(u,X) \circ f = \mathrm{Cart}(u,X) \circ g \vdash f = g$$

$$p_{\mathrm{Fl}}(g) = u \circ v \vdash \exists! f \quad (p_{\mathrm{Fl}}(f) = v \wedge g = \mathrm{Cart}(u,X) \circ f)$$

où u,v sont de sorte $\mathrm{Fl}_{\mathbb{B}}$, X de sorte $\mathrm{Ob}_{\mathbb{E}}$, f, g de sorte $\mathrm{Fl}_{\mathbb{E}}$.

Le fait que toutes ces théories soient définissables par $\varprojlim$ finies n'est pas nouveau (voir par exemple [Be 3]). Elles sont données en exemple pour montrer que le formalisme adopté, ave l'abréviation des symboles fonctionnels partiels, est assez simple et naturel. A noter que l'emploi du $\exists!$ permet d'éviter l'introduction de nombreux symboles (pour les flèches terminales, les factorisations à travers les produits fibrés, les flèches caractéristiques, ...) .

d) Théories relatives au corpus ($\varprojlim$)

Une théorie relative au corpus ($\varprojlim$) est d'après les définitions générales de Bénabou [Be 3] la donnée d'un type de diagramme (fini) $\mathbb{D}$ et (d'un nombre fini) d'axiomes qui sont des flèches de la catégorie à $\varprojlim$ finies $G(\mathbb{D})$ libre au dessus de $\mathbb{D}$. Un modèle d'une telle théor e dans une catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$ est un diagramme $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que le foncteur induit $G(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ rende inversible les flèches-axiomes.

$G(\mathbb{D})$ est équivalente à $\mathcal{E}_0(\mathcal{L}(\mathbb{D}))$ où $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ désigne la $\exists!$-théorie sans axiome propre dont le langage a pour sortes les objets de $\mathbb{D}$ et pour symboles fonctionnels les flèches de $\mathbb{D}$ et $\mathcal{E}_0$ est la construction décrite en II d . On a en effet l'équivalence :

$$\underline{\mathrm{Lex}}(G(\mathbb{D}),\mathbb{C}) \simeq \underline{\mathrm{Diag}}(\mathbb{D},\mathbb{C}) \simeq \underline{\mathrm{Mod}}(\mathcal{L}(\mathbb{D}),\mathbb{C}) \simeq \underline{\mathrm{Lex}}(\mathcal{E}_0(\mathcal{L}(\mathbb{D})), \mathbb{C}) .$$

Considérons une flèche $(A ; \vec{i}) \longrightarrow (B ; \vec{j})$ de $\mathcal{E}_0(\mathcal{L}(\mathbb{D}))$ représentée par $\vec{t}$. Un foncteur exact à gauche $\mathcal{F}$ la rend inversible ssi le modèle de $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ induit par $\mathcal{F}$ satisfait

$$A(\vec{x}),\ A(\vec{x}'),\ \vec{t}(\vec{x}) = \vec{t}(\vec{x}') \vdash\!\dashv \vec{x} = \vec{x}'$$

et

$$B(\vec{y}) \vdash\!\dashv \exists!\vec{x}\ (A(\vec{x}) \wedge \vec{y} = \vec{t}(\vec{x})) .$$

Ainsi la $\exists!$-théorie équivalente à la théorie relative au corpus ($\varprojlim$) considérée est celle qui est écrite dans le langage $\mathcal{L}(\mathbb{D})$ et qui a pour axiomes les préséquents écrits ci-dessus correspondant à chaque flèche axiome.

REFERENCES

[Be1] J. Bénabou : Quelques remarques sur la "logique catégorique" Groupes de contact Sciences Mathématiques 1973 F.N.R.S.

[Be2] J. Bénabou : Catégories et logiques faibles Tagungs bericht 1973 , Oberwolfach.

[Be3] J. Bénabou : Théories relatives à un corpus C.R.A.S. Tome 281, Série A, pp. 831-834.

[Bo] A. Boileau : Types vs topos, Université de Montréal, Juin 1975.

[CC] M.F. Coste et M. Coste : Théories cohérentes et topos cohérents, Séminaire de Théorie des Catégories dirigé par J. Bénabou Mai 1975.

[Co1] M. Coste : Logique du 1er ordre dans les topos élémentaires, Séminaire de Théorie des Catégories dirigé par J. Bénabou, 1973-1974.

[Co2] M. Coste : Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires, Séminaire de Théorie des Catégories dirigé par J. Bénabou, Novembre 1974.

[Di] J. Dionne : Des théories élémentaires aux catégories conceptuelles, Université de Montréal, 1973.

[Fo] M. Fourman : Connections between category theory and logic, Thèse, Oxford 1974.

[Fr1] P. Freyd : Aspects of topoi, Bull. Austr. Math. Soc. Vol 7 (1972) pp. 1-76.

[Fr2] P. Freyd : On Canonizing category theory or on functorializing model theory, Mars 1974.

[GU] P. Gabriel et F. Ulmer : Local präsentierbare Kategorien
L.N. in Math. n° 221, Springer.

[Ke] O. Keane : Abstract Horn Theories, Model Theory and Topoi
L.N. in Math. n° 445, Springer.

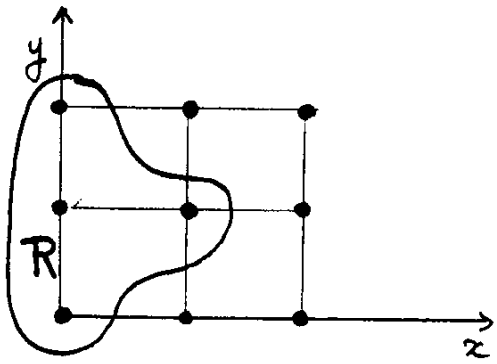
[La] F.W. Lawvere : Introduction, Model Theory and Topoi.

[Vo] H. Volger : Logical categories, semantical categories and topoi,
Novembre 1972, dans Model Theory and Topoi.

NOTES

a) Le point suivant a été soulevé par G. Reyes : Est ce que $\exists!x\ \exists!y\ R(x,y)$ veut dire la même chose que $\exists!(x,y)\ R(x,y)$. (Dans le premier cas, la quantification porte successivement sur les deux variables ; dans le deuxième, elle s'applique directement au couple).

Considérons d'abord le $\exists!$ dans son interprétation ordinaire, c'est-à-dire que $\exists!x\ A(x)$ abrège $\exists x\ \forall y\ (A(y) \longleftrightarrow x = y)$. Prenons la réalisation de la relation binaire R dans un ensemble à trois éléments donnée par le graphique suivant :



Alors $\exists!x\ \exists!y\ R(x,y)$ est vraie, mais $\exists!(x,y)\ R(x,y)$ et $\exists!y\ \exists!x\ R(x,y)$ ne le sont pas .

Maintenant donnons au $\exists!$ la signification qui lui a été attribuée dans ce papier. Dire que $\exists!x\ \exists!y\ R(x,y)$ est vraie, c'est dire que :

1) les y tels que $R(x,y)$ dépendent fonctionnellement de x, puisque on a pu interpréter $\exists!y\ R(x,y)$. Soit ϕ_R la fonction partielle qui donne les y tels que $R(x,y)$

2) ϕ_R est définie en un point et un seul.

On voit ainsi que les trois formules $\exists!x\ \exists!y\ R(x,y)$, $\exists!y\ \exists!x\ R(x,y)$ et $\exists!(x,y)\ R(x,y)$ ont le même sens.

Ceci montre que le $\exists!$ tel qu'il est défini ici se comporte mieux, en tout cas autrement, que le $\exists!$ habituel. Il vaudrait peut-être mieux le noter différemment ...

b) Suite à une remarque de Y. Diers, il apparaît nécessaire de préciser un point relatif à la partie IV, c. Considérons par exemple la théorie des catégories à $\varprojlim$ finies. Un modèle (ensembliste) de cette théorie est une catégorie à $\varprojlim$ finies avec un choix de l'objet final et des produits fibré s. Un homomorphisme est donc un foncteur qui préserve ces choix. Ceci ne correspond donc pas à la notion de foncteur exact à gauche, qui est la bonne notion. Cependant on peut aisément exprimer le fait qu'un foncteur $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ (donné par F_{Ob} et F_{Fl}) est exact à gauche :

$$s_{\mathbb{D}}(f) = F_{Ob}(1_{\mathbb{C}}) \ , \quad b_{\mathbb{D}}(f) = 1_{\mathbb{D}} \longmapsto \mathrm{Iso}(f)$$

$$p_1(F_{Fl}g,\ F_{Fl}h)\circ f = F_{Fl}p_1(g,h),\ p_2(F_{Fl}g, F_{Fl}h)\circ f = F_{Fl}p_2(g,h) \longmapsto \mathrm{Iso}(f)$$

(f variable de sorte $Fl_{\mathbb{D}}$, g et h de sorte $Fl_{\mathbb{C}}$) .

Sur ce point comme sur l'ensemble des exemples de IV, c , la seule chose nouvelle est l'emploi du formalisme logique.

ERRATAS ET NOTES SUPPLEMENTAIRES

Page 4, ligne 3: Lire "symboles $\vee$, $\wedge$, $=$ et $\exists!$."

Page 8, Remarque: $\mathcal{R}(A\ ;\ V)$ n'est pas isomorphe à $\mathcal{R}(B\ ;\ V,x)$ (signalé par R. Seely)

Page 14, Proposition: Le modèle initial de $\mathbb{T}$ est bien sur donné par $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(\mathbb{T})}(1\ ,\ -)$, ce qui permet de retrouver sa description.

Page16, lignes 15 et 16: Lire " $\underline{B} \vdash_{\mathbb{T}}$ "

Page 19, ligne 9: Lire " $\exists! y(B(y) \wedge G_f(t_1,\ldots,t_n,y))$."

PLAN

Introduction

I) Description des $\exists!$-théories

a) Le langage

b) Le système de déduction

c) $\exists!$-théorie

d) Remarques

II) $\exists!$-Théories et catégories à $\varprojlim$ finies

a) Modèle d'une $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$ dans une catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$

b) Catégorie à $\varprojlim$ finies associée à une $\exists!$-théorie $\mathbb{T}$

c) $\exists!$-Théorie associée à une petite catégorie à $\varprojlim$ finies $\mathbb{C}$

d) Théories qui s'expriment avec $\vee$, $\wedge$, $=$

III) Présentations

a) Modèle initial d'une $\exists!$-théorie

b) Présentations

c) Modèles de présentation finie

d) Comparaison avec les résultats de Gabriel et Ulmer

IV) Quelques exemples d'écriture

a) Ecriture de quelques propriétés définissables à l'aide de $\varprojlim$ finies dans une catégorie

b) Théories avec symboles fonctionnels partiels

c) Exemples de $\exists!$-théories

d) Théories relatives au corpus $(\varprojlim)$

Références

Notes