CENTRE SCIENTIFIQUE
ET POLYTECHNIQUE
Place du 8 Mai 1945
93206 SAINT-DENIS

SEMINAIRE DE THEORIE DES CATEGORIES
DIRIGE PAR JEAN BENABOU

# THEORIES COHERENTES & TOPOS COHERENTS

par MARIE-FRANÇOISE COSTE
& MICHEL COSTE

MAI 1975

# INTRODUCTION

Dans ce papier on présente une rédaction de théorèmes dus à G. Reyes et M. Makkai [1] et concernant la classification des modèles des théories cohérentes. Les résultats et les techniques développés par J. Bénabou ou dans le séminaire qu'il dirige [2],[3],[4] fournissent un cadre approprié pour traiter ces problèmes.

Dans le chapitre 0 on développe l'outil logique nécéssaire, en particulier deux théorèmes qui sont des modifications du théorème d'élimination des coupures et du théorème de complétude.

Dans le chapitre I on suit de très près G. Reyes et M. Makkai. On expose la correspondance entre topos cohérent et théorie cohérente, ainsi que le théorème de P. Deligne. On montre que l'on peut se passer du prétopos $E_{coh}$.

Dans le chapitre II on donne une autre construction du topos classifiant, qui utilise des sites plus faciles à décrire. L'idée de la construction s'est développée à partir de discussions avec M. Tierney. La méthode s'applique directement au cas du topos de Zariski.

Les chapitres 0 et I ont été exposés par M.F. Coste au séminaire de théorie des catégories dirigé par J. Bénabou, à la suite d'exposés de S. Fakir sur les points des topos de Grothendieck [5].

Le chapitre II à été exposé par M. Coste au séminaire dirigé par M. Tierney à Paris.

Les chapitres 0 et II ont été rédigés par M. Coste, le chapitre I par M.F. Coste et l'introduction est le résultat d'un compromis entre les deux rédacteurs.

## REFERENCES

[1] M. Makkai et G.E. Reyes
Model-theoretic methods in the theory of topoi and related categories.

[2] J. Bénabou
Catégories et logiques faibles.
Tagungsbericht Oberwolfach 1973.

[3] M. Coste
Logique du 1$^{er}$ ordre dans les topos élémentaires.
Séminaire J. Bénabou - 1973-1974.

[4] M. Coste
Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires.
Séminaire J. Bénabou - Novembre 1974.

[5] S. Fakir
Points d'un topos de Grothendieck.
Groupe de catégorie et logique - U.E.R. Maths. - Lille I
Février 1973.

# Chapitre 0 : Théories cohérentes

## A) Langage et théorie cohérentes

Un langage cohérent est un langage égalitaire du premier ordre, éventuellement multisorte, où on n'autorise pour la formation des formules que les connecteurs logiques suivants :

$$\wedge\ ,\quad \vee\ ,\quad \exists\ .$$

Etant donné un langage cohérent $\mathcal{L}$ , on considérera les séquents de $\mathcal{L}$ , qui sont les expressions de la forme :

$$\Gamma \longmapsto \Delta^{V}$$

où $\Gamma$ et $\Delta$ sont des ensembles finis (éventuellement vides) de formules de $\mathcal{L}$ et $V$ un ensemble fini de variables contenant les variables libres de $\Gamma$ et $\Delta$ .

Notation : Si $\Gamma'$ (resp. $\phi$) est un ensemble fini de formules de $\mathcal{L}$ (resp. une formule de $\mathcal{L}$ ) $\Gamma, \Gamma'$ (resp. $\Gamma, \phi$) désignera $\Gamma \cup \Gamma'$ (resp. $\Gamma \cup \{\phi\}$). On notera de la même façon les ensembles de variables.

Une théorie cohérente $\mathcal{T}$ dans un langage (cohérent) $\mathcal{L}$ est la donnée d'un ensemble de séquents de $\mathcal{L}$ : ce seront les "axiomes" (non logiques) de $\mathcal{T}$ .

Le moyen pour construire les théorèmes à partir de ces axiomes est donné par le système de déduction suivant :

(s, t, u désignent des termes de $\mathcal{L}$ )

Axiomes (logiques) : $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ pour $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

$$\Gamma \vdash \Delta,\ s=s^{V}$$

$$\Gamma,\ s = t \vdash \Delta,\ t=s^{V}$$

$$\Gamma,\ s = t,\ t = u \vdash \Delta,\ s=u^{V}$$

Règles : Introductions à gauche — Introductions à droite

$$\wedge \quad \frac{\Gamma,\ \Phi_1 \vdash \Delta^V}{\Gamma,\ \Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Delta^V} \qquad \frac{\Gamma,\ \Phi_2 \vdash \Delta^V}{\Gamma,\ \Phi_1 \wedge \Phi_2 \vdash \Delta^V} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_1{}^V \qquad \Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_2{}^V}{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_1 \wedge \Phi_2{}^V}$$

$$\vee \quad \frac{\Gamma,\ \Phi_1 \vdash \Delta^V \qquad \Gamma,\ \Phi_2 \vdash \Delta^V}{\Gamma,\ \Phi_1 \vee \Phi_2 \vdash \Delta^V} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_1{}^V}{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_1 \vee \Phi_2{}^V} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_2{}^V}{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi_1 \vee \Phi_2{}^V}$$

$$\exists \quad \frac{\Gamma,\ \Phi(a) \vdash \Delta^{V,a}}{\Gamma,\ \exists x\ \Phi(x) \vdash \Delta^V}\ a \notin V \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi(t)^V}{\Gamma \vdash \Delta,\ \exists x\ \Phi(x)^V}$$

Coupure
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi^V \qquad \Gamma,\ \Phi \vdash \Delta^V}{\Gamma \vdash \Delta^V}$$

On suppose que les axiomes non logiques de $\mathcal{T}$ sont clos par substitution :

$$\frac{\Gamma(a) \vdash \Delta(a)^{V,a}}{\Gamma(t) \vdash \Delta(t)^{V,V'}}$$

et augmentation :
$$\frac{\Gamma \vdash \Delta^V}{\Gamma,\Gamma' \vdash \Delta,\Delta'^V}$$

Un exemple **de théorie** cohérente : la théorie des anneaux locaux.

$\mathcal{L}$ a une seule sorte de variables, et les symboles fonctionnels $0,1,-,+,\times$ (avec le nombre de place et les conventions d'écriture habituels). Les axiomes non logiques sont (moyennant cloture par substitution et augmentation) ceux de la théorie des anneaux commutatifs unitaires :

$$\vdash (a+b)+c = a+(b+c)^{a,b,c}$$

$$\vdash a+0 = a^a$$

$$\vdash a+(-a) = 0^a$$

$$\vdash a+b = b+a^{a,b}$$

$$\vdash (a\times b)\times c = a\times(b\times c)^{a,b,c}$$

$$\vdash a\times 1 = a^a$$

$$\vdash a\times(b+c) = (a\times b)+(a\times c)^{a,b,c}$$

$$\vdash a\times b = b\times a^{a,b}$$

plus un axiome qui dit que l'anneau est local :

$$\vdash \exists x\ (a \times x = 1) \vee \exists y\ ((1-a) \times y = 1)^{a}$$

plus un axiome qui interdit à l'anneau local d'être réduit à 0.

$$0 = 1 \vdash^{\emptyset}$$

B) <u>Théorie classique</u>

Rapports entre théorie classique et théorie cohérente.

Un langage classique est, comme un langage cohérent, un langage égalitaire du premier ordre éventuellement multisorte, la différence est qu'on utilise tous les connecteurs ordinaires :

$$\wedge,\quad \vee,\quad \rightarrow,\quad \sim,\quad \forall,\quad \exists\ .$$

Il faudra bien sûr ajouter dans le système de déduction des règles pour les nouveaux connecteurs :

| | Introduction à gauche | Introduction à droite | |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \Phi^{V} \qquad \Gamma, \Psi \vdash \Delta^{V}}{\Gamma, \Phi \rightarrow \Psi \vdash \Delta^{V}}$ | $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Delta, \Psi^{V}}{\Gamma \vdash \Delta, \Phi \rightarrow \Psi^{V}}$ | |
| $\sim$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \Phi^{V}}{\Gamma, \sim \Phi \vdash \Delta^{V}}$ | $\dfrac{\Gamma, \Phi \vdash \Delta^{V}}{\Gamma \vdash \Delta, \sim \Phi^{V}}$ | |
| $\forall$ | $\dfrac{\Gamma, \Phi(t) \vdash \Delta^{V}}{\Gamma, \forall x\ \Phi(x) \vdash \Delta^{V}}$ | $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \Phi(a)^{V,a}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\ \Phi(x)^{V}}$ | $a \notin V$ |

A un langage cohérent $\mathcal{L}$ est associé le langage classique $\mathcal{L}^{+}$, obtenu en ajoutant les connecteurs supplémentaires. Si on a une théorie cohérente $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$ on lui associe la théorie classique $\mathcal{T}^{+}$ dans $\mathcal{L}^{+}$, dont les axiomes sont ceux de $\mathcal{T}$ (moyennant une cloture par augmentation, puisque l'on a de nouvelles formules). On a le :

<u>Théorème 1</u> : Soit S un segment de $\mathcal{L}$. Si S est un théorème de $\mathcal{T}^{+}$, S est un théorème de $\mathcal{T}$.

Démonstration en annexe.

C) Théorème de complétude

L'adjectif "classique" vient du fait que le système de déduction présenté est bien adapté à la semantique ordinaire, à une petite différence près : les modèles considérés étant tous les modèles ensemblistes, même ceux dont l'univers est vide. Dans de tels modèles d'une théorie classique $T$, tous les théorèmes de $T$ sont valides. Et réciproquement, on a un théorème de complétude que l'on présente ainsi :

Soit $T$ une théorie classique, écrite dans $L$. Une formule signée de $L$ est une expression du genre $+\Phi$ ou $-\Phi$, où $\Phi$ est une formule de $L$.

Soient $\mathcal{S}$ un ensemble de formules signées de $L$, $\mathcal{V}$ un ensemble de variables contenant les variables libres des formules de $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-consistant par rapport à $T$ si quel que soit $S = \{+\Phi_1, \ldots, +\Phi_n, -\Psi_1, \ldots, -\Psi_n\}$ partie finie de $\mathcal{S}$, $V$ partie finie de $\mathcal{V}$ contenant les variables libres de $S$, $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \vdash \Psi_1, \ldots, \Psi_n{}^V$ n'est pas un théorème de $T$.

$\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-réalisable par rapport à $T$ si il existe un modèle (ensembliste, éventuellement vide) $\mathcal{M}$ de $T$ et pour chaque variable $a$ de $\mathcal{V}$ un paramètre $\bar{a}$ dans $\mathcal{M}$ tel que pour tout $+(-)\ \Phi(a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{S}$ $\Phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$ est vrai (faux) dans $\mathcal{M}$. (Ce qui entraine que pour tout $S = \{+\Phi_1, \ldots, +\Phi_m, -\Psi_1, \ldots, -\Psi_n\}$ comme précédemment, $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \vdash \Psi_1,\ldots,\Psi_n{}^V$ n'est pas valide dans $\mathcal{M}$ ).

Théorème 2 : Si $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-consistant par rapport à $T$, $\mathcal{S}$ est $\mathcal{V}$-réalisable par rapport à $T$.

Démonstration en annexe.

Avec le théorème 1, on déduit de ce théorème son analogue pour le cas d'une théorie cohérente.

D) Vrai et faux

Etant donné un langage (cohérent ou classique) $\mathcal{L}$ on peut lui adjoindre deux symboles relationnels à 0 place $v$ et $f$ pour désigner le vrai et le faux. On obtient ainsi un langage $\mathcal{L}'$. On ajoute aussi deux genres d'axiomes :

$$\Gamma \vdash \Delta, v^V \qquad \text{et} \qquad \Gamma, f \vdash \Delta^V.$$

Ceci ne change pas essentiellement la situation de départ :

Soit $\phi'$ une formule de $\mathcal{L}'$, V l'ensemble de ses variables libres. Alors

* ou bien il existe une formule $\phi$ de $\mathcal{L}$ telle que $\Phi \vdash \Phi'^{V}$ et $\Phi' \vdash \Phi^{V}$ sont démontrables ($\Phi$ et $\Phi'$ sont équivalentes)

* ou bien $\Phi'$ est équivalente à v

* ou bien $\Phi'$ est équivalente à f

On en déduit que si $\Gamma' \vdash \Delta'^{V}$ est un séquent de $\mathcal{L}'$

* ou bien il existe un séquent $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ de $\mathcal{L}$ tel qu'on puisse démontrer $\Gamma' \vdash \Delta'^{V}$ à partir de $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ et vice-versa ($\Gamma \vdash \Delta^{V}$ et $\Gamma' \vdash \Delta'^{V}$ sont déductivement équivalents).

* ou bien $\Gamma' \vdash \Delta'^{V}$ est déductivement équivalent à un axiome pour le vrai

* ou bien $\Gamma' \vdash \Delta'^{V}$ est déductivement équivalent à un axiome pour le faux.

Soit $\mathcal{T}'$ une théorie dans $\mathcal{L}'$(avec les axiomes pour le vrai et le faux). On peut supposer, sans changer les théorèmes de $\mathcal{T}'$, que les axiomes de $\mathcal{T}'$ sont exprimés dans $\mathcal{L}$. Ceci donne une théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$. Un modèle de $\mathcal{T}$ est aussi bien sur un modèle de $\mathcal{T}'$. Donc si $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est un séquent de $\mathcal{L}$, il est théorème de $\mathcal{T}$ si et seulement si il est théorème de $\mathcal{T}'$.

Dans les chapitres suivants on utilisera chaque fois que ce sera commode, des langanges avec v et f.

## Annexe 1 : Idée de la preuve du théorème 1

Le résultat se déduit d'un autre résultat du type "élimination des coupures". On définit :

1) Complexité relative d'une formule $\Phi$ de $\mathcal{L}^+$ (notée $d(\Phi)$ ) :

* si $\Phi$ est une formule de $\mathcal{L}$, $d(\Phi) = 0$
* sinon dans le cas $\Phi = \Phi_1 \xrightarrow{\hat{v}} \Phi_2$

$$d(\Phi) = \sup(d(\Phi_1), d(\Phi_2)) + 1$$

dans le cas $\Phi = \sim\Psi$ , $\Phi = \underset{\exists}{\forall} x\, \Psi(x)$

$$d(\Phi) = d(\Psi) + 1$$

2) $\Phi$ est coupée dans une démonstration $\mathcal{D}$ si la règle de coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Phi^V \quad \Gamma, \Phi \vdash \Delta^V}{\Gamma \vdash \Delta^V}$$

apparaît dans $\mathcal{D}$. La compléxité relative d'une démonstration $\mathcal{D}$ de $\mathcal{T}^+$ (notée $d(\mathcal{D})$) est le sup des $d(\Phi)$ où $\Phi$ est coupée dans $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D}$ est une démonstration dans $\mathcal{T}^+$ d'un séquent $\Gamma \vdash \Delta^V$ de $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{T}$ si et seulement si $d(\mathcal{D}) = 0$. Le théorème 1 sera donc conséquence de la

<u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{D}$ une démonstration dans $\mathcal{T}^+$ d'un séquent $\Gamma \vdash \Delta^V$ de $\mathcal{L}^+$. On construit à partir de $\mathcal{D}$ une nouvelle démonstration $\mathcal{D}'$ du même séquent dans $\mathcal{T}^+$ avec $d(\mathcal{D}') = 0$

La démonstration de cette proposition se ramène facilement à celle du

<u>Lemme de réduction</u> : Soit

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\ \mathcal{D}_0\\ \Gamma \vdash \Delta, \Phi\ V\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\ \mathcal{D}_1\\ \Gamma, \Phi \vdash \Delta^V\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta^V}$$

une démonstration dans $\mathcal{T}^+$ avec $d(\Phi) \neq 0$ et $d(\mathcal{D}_i) < d(\Phi)$. On construit une nouvelle démonstration

$$\mathcal{R}(\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1) \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \Delta^V\end{array}$$

dans $\mathcal{E}^+$ avec $d(\mathcal{R}(\mathcal{D}_o, \mathcal{D}_1) < d(\Phi)$

D'abord quelques définitions et notations

1) Longueur d'une démonstration $\mathcal{D}$ (notée $\ell(\mathcal{D})$)

* Si $\mathcal{D}$ est réduite à un axiome, $\ell(\mathcal{D}) = 0$

* Si $\mathcal{D}$ est $\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\mathcal{D}_i\\ \Gamma_i \vdash \Delta^{V_i}\end{matrix}}{\Gamma \quad \Delta^V}$ $\qquad \ell(\mathcal{D}) = \sup(\ell(\mathcal{D}_i)) + 1$

2) Si $\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \Delta^V\end{matrix}$ est une démonstration, $\begin{matrix}\Phi,\mathcal{D}\\ \vdots\\ \Gamma,\Phi \vdash \Delta^V\end{matrix}$ désignera la démonstration obtenue en ajoutant $\Phi$ à gauche dans tous les séquents de $\mathcal{D}$ (même chose avec $\Phi$ à droite ou avec un ensemble fini de formules au lieu de $\Phi$).

On a $\ell(\Phi,\mathcal{D}) = \ell(\mathcal{D})$, $d(\Phi,\mathcal{D}) = d(\mathcal{D})$

3) Si $\begin{matrix}\mathcal{D}(a)\\ \vdots\\ \Gamma(a) \vdash \Delta(a)^{V,a}\end{matrix}$ est une démonstration et $t$ un terme dont les variables sont dans $V$, $\begin{matrix}\mathcal{D}(t)\\ \vdots\\ \Gamma(t) \vdash \Delta(t)^V\end{matrix}$ désignera la démonstration obtenue en remplaçant toutes les occurences de $a$ par $t$ et en supprimant $a$ des ensembles variables en exposant. On a $\ell(\mathcal{D}(t)) = \ell(\mathcal{D}(a))$, $d(\mathcal{D}(t)) = d(\mathcal{D}(a))$.

La démonstration du lemme de réduction se fait par induction sur $\ell(\mathcal{D}_o) + \ell(\mathcal{D}_1)$ en distinguant plusieurs cas

I) $\ell(\mathcal{D}_o) > 0$, $\ell(\mathcal{D}_1) > 0$, la dernière règle de chaque démonstration étant une introduction (du bon coté) de la formule coupée. Par exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\mathcal{D}'_o(a)\\ \Gamma \vdash \Delta,\Phi(a)^{V,a}\end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta,\forall x\,\Phi(x)^V} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\,\mathcal{D}'_1\\ \Gamma,\Phi(t) \vdash \Delta^V\end{matrix}}{\Gamma,\forall x\,\Phi(x) \vdash \Delta^V}}{\Gamma \vdash \Delta^V}$$

On a directement $\mathcal{R}(\mathcal{D}_o, \mathcal{D}_1)$ :

$$\dfrac{\begin{matrix} \vdots\ \mathcal{D}'_o(t) \\ \Gamma \vdash \Delta,\ \Phi(t)^V \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \vdots\ \mathcal{D}'_1 \\ \Gamma,\ \Phi(t) \vdash \Delta^V \end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta^V}$$

II) $\ell(\mathcal{D}_o) = 0$ (ou symétriquement $\ell(\mathcal{D}_1) = 0$)

$$\dfrac{\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi^V \qquad \begin{matrix} \vdots\ \mathcal{D}_1 \\ \Gamma,\ \Phi \vdash \Delta^V \end{matrix}}{\Gamma \vdash \Delta^V}$$

$\Gamma \vdash \Delta,\ \Phi^V$ est un axiome de $\mathcal{E}^+$. Puisque $d(\Phi) \neq 0$ et que $\mathcal{E}$ s'exprime dans $\mathcal{L}$

* $\Gamma \vdash \Delta^V$ est déjà un axiome de $\mathcal{E}^+$ et alors $\mathcal{R}(\mathcal{D}_o, \mathcal{D}_1)$ est réduite à l'axiome $\Gamma \vdash \Delta^V$
* ou sinon $\Phi \varepsilon \Gamma$ et alors $(\mathcal{D}_o, \mathcal{D}_1)$ est $\mathcal{D}_1$.

III) Dans tous autres cas, on intervertit la coupure et une introduction juste au dessus ne portant pas sur la formule coupée. On applique alors l'hypothèse d'induction à la partie de la démonstration modifiée qui se termine par la nouvelle coupure. Par exemple :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \vdots\ \mathcal{D}'_o \\ \Gamma,\Psi \vdash \Delta,\Phi^V \end{matrix}}{\Gamma,\Psi\wedge\Theta \vdash \Delta,\Phi^V} \qquad \begin{matrix} \vdots\ \mathcal{D}_1 \\ \Gamma,\Psi\wedge\Theta,\Phi \vdash \Delta^V \end{matrix}}{\Gamma,\ \Psi\wedge\Theta \vdash \Delta^V} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} \vdots\ \Psi\wedge\Theta, \mathcal{D}'_o \\ \vdots \\ \Gamma,\Psi,\Psi\wedge\Theta \vdash \Delta,\Phi^V \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vdots\ \Psi, \mathcal{D}_1 \\ \vdots \\ \Gamma,\Psi,\Psi\ \ \Theta,\ \Phi\ \ \ \Delta^V \end{matrix}}{\Gamma,\Psi,\Psi\wedge\Theta \vdash \Delta^V}}{\Gamma,\Psi\wedge\Theta \vdash \Delta^V}$$

L'hypothèse d'induction s'applique à la démonstration entourée.

## ANNEXE 2 : IDEE DE LA PREUVE DU THEOREME 2

On montre d'abord le résultat suivant :

<u>Proposition</u> : Soit $(\mathfrak{S}, \mathfrak{V})$ tel que

1) $\mathfrak{S}$ est $\mathfrak{V}$ consistant par rapport à T.

2) si $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \vdash \Psi_1,\ldots,\Psi_n{}^V$ est un théorème de T et si $V \subset \mathfrak{V}$, il existe un $i$ tel que $-\Phi_i \in \mathfrak{S}$ ou un $j$ tel que $+\Psi_j \in \mathfrak{S}$.

3) Si $-\forall x\Phi(x)$ (resp $+\exists x\Phi(x)$) $\in \mathfrak{S}$, il existe $a \in \mathfrak{V}$ tel que $-\Phi(a)$ (resp $+\Phi(a)$) $\in \mathfrak{S}$.

Alors $\mathfrak{S}$ est $\mathfrak{V}$ réalisable par rapport à T.

Soit $\mathfrak{T}\mathfrak{V}$ l'ensemble des termes dont les variables sont dans $\mathfrak{V}$. Si $r$ est un symbole relationnel n-aire, on pose

$$|r| = \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{T}\mathfrak{V}^n \mid +r(t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{S}\}$$

$|=|$ est une relation d'équivalence compatible avec les symboles fonctionnels. Alors on construit un modèle $\mathfrak{M}$ de T de la façon suivante : L'univers de $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{T}\mathfrak{V}/_{|=|}$. L'intérprétation d'un symbole fonctionnel est l'interprétation canonique, l'interprétation d'un symbole relationnel $r$ est celle induite par $|r|$. A chaque $a \in \mathfrak{V}$ on associe le paramètre $\bar{a}$ qui est la classe d'équivalence de $a$ dans $\mathfrak{T}\mathfrak{V}$. Par induction sur la longueur de $\Phi$, on montre que si

$+\Phi(a_1,\ldots,a_n)$ (resp $-\Phi(a_1,\ldots,a_n)$) $\in \mathfrak{S}$ alors $\Phi(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$ est vrai (resp. faux) dans $\mathfrak{M}$.

Ceci montre que $\mathfrak{S}$ est $\mathfrak{V}$ réalisable par rapport à $\mathfrak{T}$.

Pour achever la démonstration du théorème, on montre la

<u>Proposition</u>: Si $\mathfrak{S}_o$ est $\mathfrak{V}_o$ consistant par rapport à T, il existe $(\mathfrak{S}, \mathfrak{V})$ comme dans la proposition précédente avec $\mathfrak{S}_o \subset \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{V}_o \subset \mathfrak{V}$.

* Soit $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \vdash \Psi_1,\ldots,\Psi_n{}^V$ un théorème de T, avec $V \subset \mathfrak{V}_o$. Alors il existe un $i$ ou un $j$ tel que $\mathfrak{S}_o, -\Phi_i$ ou $\mathfrak{S}_o, +\Psi_j$ soit $\mathfrak{V}_o$ consistant, sinon $\mathfrak{S}_o$ ne serait plus $\mathfrak{V}_o$ consistant. On peut donc étendre $(\mathfrak{S}_o, \mathfrak{V}_o)$ en un $(\mathfrak{S}'_o, \mathfrak{V}_o)$ vérifiant les conditions 1 et 2.

* Supposons que l'on ait $-\forall x\ \Phi(x) \in \mathcal{S}'_o$. Soit $a$ une variable qui n'est pas dans $\mathcal{V}_o$. Alors $\mathcal{S}'_o, -\Phi(a)$ est $\mathcal{V}_o,a$ consistant. On peut donc étendre $(\mathcal{S}'_o, \mathcal{V}_o)$ en un $(\mathcal{S}_1, \mathcal{V}_1)$ vérifiant les conditions 1 et 3.

* On itère le processus précédent. Alors on pourra prendre $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_n$, $\mathcal{V} = \bigcup \mathcal{V}_n$.

# Chapitre I - Classification des théories cohérentes

## A) Catégorie cohérente associée à une théorie cohérente

On appelle catégorie cohérente une catégorie régulière munie de sup-finis de sous-objets stables par changement de base.

On appele foncteur cohérent un foncteur entre deux catégories cohérentes qui préserve :

- les limites projectives finies
- les images
- les sup-finis de sous-objets

Soient $C$ et $C'$ deux catégories cohérentes. On note $Coh(C, C')$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs cohérents de $C$ vers $C'$ et les flèches les transformations naturelles.

D'après [4] on sait associer à une théorie cohérente $\mathcal{T}$ une catégorie cohérente $C(\mathcal{T})$ de la manière suivante :

Un objet de $C(\mathcal{T})$ est un $(i_1,\dots,i_n; \Phi)$ où $(i_1,\dots,i_n)$ est un n-uple de types de $\mathcal{T}$ et où $\Phi$ a ses variables libres parmi $a_1, \dots, a_n$ *

Soient $(i_1,\dots,i_n; \Phi)$ et $(j_1,\dots,j_p; \Psi)$ deux objets de $\mathcal{T}$ soit $V = (a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_p)$ le n+p-uple associé à $(i_1,\dots,i_n, j_1,\dots,j_p)$.

Une flèche de $(i_1, \dots, i_n, \Phi)$ dans $(j_1, \dots, j_p; \Psi)$ est, à une $V$ équivalence près par rapport à $\mathcal{T}$ ** une formule $\theta(a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_p)$,

Notons la pour simplifier $\theta(a,b)$ , telle que :

$$\theta(a,b) \wedge \theta(a,b') \vdash b = b'^{\ a,\, b,\, b'}$$

$$\theta(a, b) \vdash \Phi(a) \wedge \Psi(b)^{\ a,\, b}$$

$$\Phi(a) \vdash \exists y \ \ \theta(a,y)^{\ a}$$

* A un n-uple $(i_1,\dots,i_n)$ de types de $\mathcal{T}$ on associe de manière fixe un n-uple $(a_1,\dots, a_n)$ de variables (chaque $a_j$ est de type $i_j$)

** Deux formules $\theta$ et $\rho$ sont $V$ équivalentes par rapport à $\mathcal{T}$ si on peut démontrer dans $\mathcal{T}$ $\rho \vdash \theta^V$ et $\theta \vdash \rho^V$ .

<u>Modèles d'une théorie cohérente $\mathcal{T}$ dans une catégorie cohérente C, morphisme de modèles</u>.

Soit $\mathcal{L}$ le langage de $\mathcal{T}$

Une réalisation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ dans C est la donnée

- pour chaque sorte i d'un objet $\mathcal{M}(i)$ de C
- pour chaque symbole fonctionnel $f(i_1,\dots,i_n\ ;\ j)$ d'une flèche $\mathcal{M}(f) : \mathcal{M}(i_1) \times \dots \times \mathcal{M}(i_n) \to \mathcal{M}(j)$
- pour chaque symbole relationnel R d'un sous objet $\mathcal{M}(R)$ de $\mathcal{M}(i_1) \times \dots \times \mathcal{M}(i_n)$ (R de signature $(i_1,\dots, i_n)$) .

On sait alors [3] définir l'interprétation du couple $(\Phi,V)$ (où $\Phi$ est une formule qui a ses variables libres dans l'ensemble fini de variables V), notée $\mathcal{M}(\Phi,V)$.

Un <u>modèle de $\mathcal{T}$ dans C</u> est une réalisation de $\mathcal{L}$ telle que si $\Gamma \vdash \Delta^{V}$ est un axiome de T on ait :

$$\mathcal{M}\Big(\bigwedge_{\Phi\in\Gamma}\Phi\ ,\ V\Big) \leq \mathcal{M}\Big(\bigvee_{\Psi\in\Delta}\Psi\ ,\ V\Big)\ .$$

Un <u>morphisme</u> $\alpha$ entre les modèles $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{T}$ est la donnée pour chaque sorte i d'une flèche $\alpha_i : \mathcal{M}(i) \to \mathcal{M}'(i)$ telle que pour tout symbole fonctionnel $f(i_1,\dots,i_n\ ;\ j)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(i_1)\times\dots\times\mathcal{M}(i_n) \arrow[r, "\alpha_{i_1}\times\dots\times\alpha_{i_n}"] \arrow[d, "\mathcal{M}(f)"'] & \mathcal{M}'(i_1)\times\dots\times\mathcal{M}'(i_n) \arrow[d, "\mathcal{M}'(f)"] \\
\mathcal{M}(j) \arrow[r, "\alpha_j"'] & \mathcal{M}'(j)
\end{tikzcd}$$

est commutatif,

et pour tout symbole rationnel R de signature $(i_1,\dots,i_n)$ l'image de $\mathcal{M}(R)$ par $(\alpha_{i_1} \times \dots \times \alpha_{i_n})$ est contenue dans $\mathcal{M}'(R)$.

<u>Lemme 1</u>

Pour toute formule $\Phi(a_1, \dots, a_n)$ ($a_j$ de type $i_j$) l'image de $\mathcal{M}(\Phi)$ par $\alpha_{i_1} \times \dots \times \alpha_{i_n}$ est contenue dans $\mathcal{M}'(\Phi)$ .

Démonstration par récurrence sur la longueur de $\Phi$.

On note Mod( $\mathcal{T}$ ,C) la catégorie dont les objets sont les modèles de $\mathcal{T}$ dans C et les flèches les morphismes de modèles.

Proposition 1

Soit C une catégorie cohérente, Mod( $\mathcal{T}$,C) et Coh(C( $\mathcal{T}$ ), C) sont deux catégories équivalentes.

Démonstration :

a) Construction d'un foncteur $\mathcal{R}$ de Coh(C( $\mathcal{T}$ ),C) dans Mod( $\mathcal{T}$ ,C).
Soit F un foncteur cohérent de C( $\mathcal{T}$ ) dans C.
Posons $\mathcal{R}(F)(i) = F(i,v)$

$\mathcal{R}(F)(f)$ = la flèche $F(f(a_1,\ldots,a_n) = b)$ de $F(i_1;v)\times \ldots \times F(i_n;v) \simeq F(i_1,\ldots,i_n;v)$ dans $F(j,v)$

$\mathcal{R}(F)(R) = F(i_1,\ldots,i_n; R\, a_1,\ldots,a_n) \rightarrowtail F(i_1,\ldots,i_n;v) \xrightarrow{\sim} F(i_1;v)\times\ldots\times F(i_n,v)$

Il est clair que $\mathcal{R}(F)$ est un modèle de $\mathcal{T}$ .

Soit $\alpha$ une transformation naturelle entre F et G, foncteurs cohérents.
Posons $\mathcal{R}(\alpha)(i) = \alpha_{(i,v)}$ et montrons que $\mathcal{R}(\alpha)$ est un morphisme de modèles entre $\mathcal{R}(F)$ et $\mathcal{R}(G)$ . $\mathcal{R}(\alpha)(i)$ **est une flèche de** $\mathcal{R}(F)(i)$ dans $\mathcal{R}(G)(i)$ . Il faut vérifier que pour tout symbole fonctionnel $f(i_1,\ldots,i_n ; j)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(F)(i_1)\times\ldots\times\mathcal{R}(F)(i_n) \arrow[r, "\mathcal{R}(F)(f)"] \arrow[d, "\mathcal{R}(\alpha)(i_1)\times\ldots\times\mathcal{R}(\alpha)(i_n)"'] & \mathcal{R}(F)(j) \arrow[d, "\mathcal{R}(\alpha)(j)"] \\
\mathcal{R}(G)(i_1)\times\ldots\times\mathcal{R}(G)(i_n) \arrow[r, "\mathcal{R}(G)(f)"] & \mathcal{R}(G)(f)
\end{tikzcd}$$

est commutatif : c'est la naturalité de $\alpha$ .

Il faut vérifier que pour tout symbole relationnel R de signature $i_1,\ldots,i_n$ l'image de $\mathcal{R}(F)(R)$ par $\mathcal{R}(\alpha)(i_1)\times\ldots\times\mathcal{R}(\alpha)(i_n)$ est contenue dans $\mathcal{R}(G)(R)$ : c'est vrai à cause de l'existence de la flèche $\alpha(i_1,\ldots,i_n, R\, a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathcal{R}(F)(R)$ dans $\mathcal{R}(G)(R)$ et de la naturalité de $\alpha$ .

b) $\mathcal{R}$ est une équivalence de catégories.

- Tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ dans C définit un foncteur $\overline{\mathcal{M}}$ de $C(\mathcal{T})$ dans C tel que $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{M}}) \simeq \mathcal{M}$ dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}, C)$.

On définit $\overline{\mathcal{M}}(i_1, \ldots, i_n; \Phi) = \mathcal{M}(\Phi)$

Soit $\theta : (i_1, \ldots, i_n; \Phi) \to (j_1, \ldots, j_p; \Psi)$ $\overline{\mathcal{M}}(\theta)$ est la flèche de $\mathcal{M}(\Phi)$ dans $\mathcal{M}(\Psi)$ associée à la relation fonctionnelle $\mathcal{M}(\theta)$ .

Il est clair que $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{M}}) \simeq \mathcal{M}$

- Soit $\beta$ un morphisme de modèles entre $\mathcal{R}(F)$ et $\mathcal{R}(G)$. Pour tout $(i_1, \ldots, i_n; \Phi)$ de $C(\mathcal{T})$ on a d'après le lemme 1 une flèche $\alpha_{(i_1, \ldots, i_n; \Phi)} : \mathcal{R}(F)(\Phi) \longrightarrow \mathcal{R}(G)(\Phi)$ qui définit une transformation naturelle $\alpha$ entre F et G.

On voit ainsi que $\mathcal{R}$ est plein et fidèle.

## B) Topologie de Grothendieck des recouvrements finis

C désignera toujours une catégorie cohérente.

Soit A un objet de C. Couv(A) est composé des familles de flèches de but A contenant une famille finie de flèches $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ de but A telles que $\bigvee_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, f_i = A$.

Il est immédiat de vérifier que les données ci-dessus définissent une topologie de Grothendieck appelée <u>topologie des recouvrements finis</u>.

<u>Proposition 2</u>

Soit $\mathcal{E}$ un topos de Grothendrick. On notera également $\mathcal{E}$ le site défini sur $\mathcal{E}$ par la topologie canonique.
Un foncteur continu de C muni de la topologie des recouvrements finis dans $\mathcal{E}$ est exactement un foncteur cohérent entre les catégories cohérentes C et $\mathcal{E}$.

Démonstration : Un foncteur continu préserve les sups (à cause de la famille couvrante
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr] \arrow[ddr] & & A_2 \arrow[dl] \arrow[ddl] \\ & A_1 \cup A_2 & \\ & A & \end{tikzcd}$$
) et les images (à cause de la famille couvrante
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Im} f \arrow[d, tail] \\ A \arrow[ur] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
)

Réciproquement un foncteur logique préserve les images et sups, donc tranforme famille couvrante en famille couvrante.

On note $FC(C,\mathcal{E})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs continus de $C$ dans $\mathcal{E}$ et les flèches les transformations naturelles. On a $Coh(C,\mathcal{E}) = FC(C,\mathcal{E})$ .

Théorème I (Reyes)

Soit $\mathcal{T}$ une théorie cohérente. Il existe un topos cohérent $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ qui classifie les modèles de $\mathcal{T}$ .

Démonstration : D'après les propsoitions 1 et 2 , on sait que les catégories $Mod(\mathcal{T},\mathcal{E})$ et $FC(C(\mathcal{T}),\mathcal{E})$ sont équivalentes. D'autre part (voir par exemple [5]) on sait que $FC(C(\mathcal{T}),\mathcal{E}) \simeq Top(\mathcal{E},\widetilde{C(\mathcal{T})})$ (catégorie des morphismes géométriques de $\mathcal{E}$ dans le topos des faisceaux sur $C(\mathcal{T})$).

$\mathcal{E}(\mathcal{T}) = \widetilde{C(\mathcal{T})}$ est cohérent puisque $C(\mathcal{T})$ est à limites projectives finies et a tous ses objets quasi compacts. et tel que $\tilde{G} \simeq \mathcal{E}$

C) Théorie cohérente associée à un topos cohérent

Soit $\mathcal{E}$ un topos cohérent. Soit $G$ un site à limites projectives finies et dont tous les objets sont quasi compacts.

On sait que $Top(\mathcal{E}',\mathcal{E}) \simeq FC(G,\mathcal{E}')$. pour tout topos de Grothendieck $\mathcal{E}'$

On va définir une théorie cohérente $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ telle que :

$$FC(G,\mathcal{E}') \simeq Mod(\mathcal{T}(\mathcal{E}),\mathcal{E}')^*$$

Description de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.

Sortes : pour chaque objet $A$ de $G$ une sorte $\overline{A}$

Symboles fonctionnels : - pour chaque flèche $f : A \to B$ de $G$ un symbole fonctionnel $\overline{f}$ de $\overline{A}$ dans $\overline{B}$ .

- pour chaque couple $(A,B)$ d'objets de $G$ un symbole fonctionnel $\langle -,- \rangle_{A,B}$ de $\overline{A},\overline{B}$ dans $\overline{A \times B}$ .

- une constante $\alpha$ de type $\overline{1}$ .

Symboles relationnels : $=_A$ pour chaque objet $A$ .

* On n'aura donc plus besoin du prétopos $\mathcal{E}_{coh}$ [1].

Axiomes

1) * pour chaque $(f,g)$ composables

$$\overline{gof}(a) = \overline{g}\,[\overline{f}(a)] \quad {}^{a}$$

* pour chaque $A$

$$\vdash \mathrm{Id}(a) = a \quad {}^{a}$$

2) * pour chaque $(A,B)$ $(p : A \times B \to A\ ,\ \ q : A \times B \to B$ les projections)

$$\vdash \langle \overline{p}(c),\ \overline{q}(c) \rangle = c \quad {}^{c}$$

$$\vdash \overline{p}\,\langle a,b\rangle = a \ ,\ \vdash \overline{q}\,\langle a,b\rangle = b \quad {}^{a,b}$$

* $$\vdash a = \alpha \quad {}^{a} \qquad (a \text{ de type } \overline{1})$$

* pour chaque $i$ mono

$$\overline{i}(a) = \overline{i}(a') \vdash a = a' \quad {}^{a,a'}$$

* pour chaque $i$, $f$, $g$ où $i = \mathrm{Ker}(f,g)$

$$\overline{f}(b) = \overline{g}(b) \vdash \exists a\ i(a) = b \quad {}^{b}$$

$$\overline{i}(a) = b \vdash \overline{f}(b) = \overline{g}(b) \quad {}^{a,b}$$

3) * pour chaque famille $f_1,\dots,f_n$ couvrante finie de $A$ (a de type $\overline{A}$

$$\vdash \bigvee_{i=1}^{n} \exists a_i\ \overline{f}_i\,(a_i) = a \quad {}^{a}$$

* pour chaque famille couvrante vide $\vdash \quad {}^{a}$

Proposition 3

Mod( $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}'$) et FC$(G,\mathcal{E}')$ sont deux catégories équivalentes.

Démonstration : A un modèle $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}'$ on associe son foncteur $\overline{\mathfrak{m}}$ continu en posant :

$$\overline{\mathfrak{m}}(A) = \mathfrak{m}(\overline{A})$$

$$\overline{\mathfrak{m}}(f) = \mathfrak{m}(\overline{f})$$

1) exprime la fonctorialité de $\overline{\mathfrak{m}}$

2) le fait qu'il préserve les limites projectives finies

3) le fait qu'il transforme famille couvrante en famille couvrante pour la topologie canonique de $\mathcal{E}$.

A un morphisme de modèle $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ on associe une transformation naturelle $\overline{\alpha} : \overline{\mathcal{M}} \to \overline{\mathcal{M}}'$ en posant $\overline{\alpha}(i) = \alpha(\overline{i})$ .

Il est clair qu'on définit ainsi une équivalence de catégories.

D'où le :

<u>Théorème 2</u> (Reyes)

Tout topos cohérent classifie une théorie cohérente .

D) <u>Théorème de Deligne</u> (dem. de G. Reyes)

Un topos cohérent E a suffisamment de points i.e. il existe un ensemble de points $(p_i)_{i\varepsilon I}$ tel que :

$$(f \neq g) \Longrightarrow (\exists\, i \in I \;\; p_i^* (f) \neq p_i^* (g)) \;.$$

Démonstration : Il s'agit de montrer qu'on peut fabriquer un point p tel que $p^*$ conserve la situation $S_o$ : f différente de g.

Soit $E \simeq \tilde{G}$ et $\varepsilon : G \hookrightarrow \tilde{G}$ .

On montre qu'il est équivalent de trouver un point p tel que $p^*$ conserve les situations

$S_1$ : h mono non iso (on prend Ker(f,g))

$S_2$ : k mono non iso et de but $\varepsilon(B)$ (on prend une famille couvrante du but de h).

$S_3$ : $(g_j)_{j\varepsilon J}$ famille de flèches de $\varepsilon(A_j)$ dans $\varepsilon(B)$ telle que $\bigcup_j \operatorname{Im} g_j \neq \varepsilon(B)$ (on prend une famille couvrante de la source de k).

$S_4$ : $(g'_j)_{j\varepsilon J}$ famille de flèches de $A'_j$ dans B telle que $\bigcup_j \operatorname{Im} \varepsilon(g_j) \neq \varepsilon(B)$ . ([5] 1-4 page 4)

Soit $\mathcal{T}(E)$ la théorie classifiée par E.

Soit $\mathcal{S} = \{\neg \exists a_j\, \overline{g}'_j (a_j) = b\}$ .

$\mathcal{S}$ est {b}-consistant : sinon il existerait $j_1, \ldots, j_n$ tel que $\vdash \bigvee_{k=1}^{n} \exists a_{j_k}\, \overline{g}'_{j_k} (a_{j_k}) = b^b$ soit un théorème de $\mathcal{T}(E)$, donc soit vrai dans tout modèle de $\mathcal{T}(E)$, donc dans le modèle générique de $\mathcal{T}(E)$ dans E , et on aurait une contradiction d'après $S_4$ .

D'après les théorèmes 1 et 2 du chapitre 0 $\mathcal{L}$ est {b}-réalisable et admet un modèle ensembliste $\mathfrak{M}$ muni d'un paramètre $\overline{b}$ tel que dans $\exists\, a_j\ \overline{g}'_j(a_j) = \overline{b}$ soit faux pour tout $j$ , c'est-à-dire que :

$$\bigcup_{j \varepsilon J} \mathfrak{M}(\overline{A}'_j) \neq \mathfrak{M}(\overline{B}) \quad .$$

D'après le théorème 2 on sait construire un point p de E conservant $S_4$ .

C.Q.F.D.

# Chapitre II : Théories cohérentes et topologies

## A) Formules-cribles et séquents-cribles

Soit $\mathcal{L}$ un langage cohérent.

**Proposition 1**

Toute formule de $\mathcal{L}$ est équivalente à une formule du genre :

$$\exists x_1^1 \ldots \exists x_{m_1}^1 \; \Phi_1(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, a_1^1, \ldots, a_{n_1}^1) \vee \ldots$$

$$\ldots \vee \; \exists x_1^k \ldots \exists x_{m_k}^k \; \Phi_k(x_1^k, \ldots, x_{m_k}^k, a_1^k, \ldots, a_{n_k}^k)$$

, où les $\Phi_i$ sont écrites uniquement avec v et $\wedge$ , ou à f (qui correspond à $k = 0$).

On appelle formule-crible une telle formule.

Preuve : Soit $\Phi$ une formule de $\mathcal{L}$ . On sait que :

* ou bien $\Phi$ est équivalente à f,
* ou bien $\Phi$ est équivalente à v, qui est aussi une formule-crible,
* ou bien $\Phi$ est équivalente à une formule écrite sans f et sans v.

Alors le résultat découle des propriétés suivantes :

$(\Psi \vee \Theta) \wedge \rho$ est équivalente à $(\Psi \wedge \rho) \vee (\Theta \wedge \rho)$

$\exists x(\Psi(x) \vee \Theta(x))$ " " " $(\exists x \Psi(x)) \vee (\exists x\, \Theta(x))$

$(\exists\, x\, \Psi(x)) \wedge \Theta$ " " " $\exists x(\Psi(x) \wedge \Theta)$

**Proposition 2**

Tout séquent de $\mathcal{L}$ est déductivement équivalent à un ensemble fini de séquents du genre

$$\Phi \vdash \Delta^{V}$$

où $\Phi$ est écrite seulement avec v et $\wedge$ et $\Delta$ est un ensemble fini de formules du genre $\exists x_1 \ldots \exists x_m \, \Psi\, (x_1, \ldots, x_m, a_1, \ldots, a_n)$ où $\Psi$ est écrite seulement avec v et $\wedge$ et est telle que $\Psi(b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n) \vdash \Phi^{V, b_1, \ldots, b_m}$ soit démontrable.

On appelle un tel séquent séquent-crible.

Preuve : Soit $\Gamma \vdash \Delta^V$ un séquent de $\mathcal{L}$ . Soit $\Theta$ la conjonction des formules de $\Gamma$ ($\Theta$ est v si $\Gamma$ est vide). $\Theta$ est équivalente à une formule-crible $\Theta'$, et $\Gamma \vdash \Delta^V$ est déductivement équivalent à $\Theta' \vdash \Delta^V$. Supposons que $\Theta'$ soit $\exists x_1^1 \dots \exists x_{m_1}^1\ \Phi_1(x_1^1,\dots,x_{m_1}^1,\ a_1^1,\dots,a_{n_1}^1) \vee \dots$

$$\dots \vee \exists x_1^k \dots \exists x_{m_k}^k\ \Phi_k(x_1^k,\dots,x_{m_k}^k,\ a_1^k,\dots,a_{n_k}^k)$$

Alors $\Theta' \vdash \Delta^V$ est déductivement équivalent à l'ensemble des séquents $\exists x_1^i \dots \exists x_{m_i}^i\ \Phi_i(x_1^i,\dots,x_{m_i}^i,\ a_1^i,\dots,a_{n_i}^i) \vdash \Delta^V$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ (cet ensemble est vide si $\Theta'$ est f). Maintenant un tel séquent est déductivement équivalent à

$$\Phi_i(b_1^i,\dots,b_{m_i}^i,\ a_1^i,\dots,a_{n_i}^i) \vdash \Delta^{V, b_1^i,\dots,b_{m_i}^i}$$

pour $b_1^i,\dots,b_{m_i}^i \notin V$. On peut donc se ramener à des séquents $\Phi \vdash \Delta^V$ où $\Phi$ est écrite avec v et $\wedge$ .

Soit alors $\rho$ la disjonction des formules de $\Delta$ ($\rho$ est f si $\Delta$ est vide). $\rho$ est équivalente à une formule crible $\rho'$ qui est par exemple

$\exists y_1^1 \dots \exists y_{p_1}^1\ \Psi_1(y_1^1,\dots,y_{p_1}^1,\ c_1^1,\dots,c_{q_1}^1) \vee \dots$

$\dots \vee \exists y_1^\ell \dots \exists y_{p_\ell}^\ell\ \Psi_\ell(y_1^\ell,\dots,y_{p_\ell}^\ell,\ c_1^\ell,\dots,c_{q_\ell}^\ell)$. $\Phi \vdash \Delta^V$ est déductivement équivalent au séquent

$$\Phi \vdash \exists y_1^1 \dots \Psi_1, \dots,\ \exists y_1^\ell \dots \Psi_\ell^{\ V}$$

et donc aussi au séquent

$$\Phi \vdash \exists y_1^1 \dots (\Psi_1 \wedge \Phi), \dots,\ \exists y_1^\ell \dots (\Psi_\ell \wedge \Phi)^V$$

Ce dernier séquent est un séquent-crible.

## B) Catégorie à $\varprojlim$ finies associée à une théorie exprimée avec v, $\wedge$ , =

Soit $\mathcal{T}_0$ une théorie dans un langage $\mathcal{L}_0$ égalitaire avec seulement v et $\wedge$ et où les <u>seuls séquents autorisés sont ceux qui ont exactement une formule à droite</u>. A une telle théorie on sait [4] associer une catégorie à $\varprojlim$ finies

$C(\mathcal{T}_o)$ telle que l'on a une équivalence de catégories $\mathrm{Mod}(\mathcal{T}_o, C') \simeq \mathrm{Ex}(C(\mathcal{T}_o), C')$ où $C'$ est une catégorie à $\varprojlim$ finies, $\mathrm{Ex}(C(\mathcal{T}_o), C')$ la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $C(\mathcal{T}_o)$ dans $C'$. $C(\mathcal{T}_o)$ est obtenu ainsi :

* Un objet est un $(i_1,\dots,i_n;\ \Phi)$ où $i_1,\dots,i_n$ est un n-uple de sortes de $\mathcal{L}_o$ (à de tels n-uples on associe une fois pour toute des n-uples de variables $a_1,\dots,a_n$ de sortes correspondantes) et $\Phi$ une formule de $\mathcal{L}_o$ dont les variables libres sont parmi $a_1,\dots,a_n$.
* Une flèche $(i_1,\dots,i_n,\ \Phi) \longrightarrow (j_1,\dots,j_p,\ \Psi)$ est un p-uple de termes $(t_1,\dots,t_p)$ de sortes $j_1,\dots,j_p$ dont les variables sont parmi $a_1,\dots,a_n$ tels que $\Phi(a_1,\dots,a_n) \vdash \Psi(t_1,\dots,t_p)^{a_1,\dots,a_n}$ soit un théorème de $\mathcal{T}_o$, modulo l'équivalence $(t_1,\dots,t_p) \sim (t'_1,\dots,t'_p)$ quand $\Phi(a_1,\dots,a_n) \vdash t_1 = t'_1 \wedge \dots \wedge t_p = t'_p{}^{a_1,\dots,a_n}$ est un théorème de $\mathcal{T}_o$.

Le topos $\widehat{C(\mathcal{T}_o)}$ classifie les modèles de $\mathcal{T}_o$: en effet si $E$ est un topos de Grothendieck, on a $\mathrm{Ex}(C(\mathcal{T}_o), E) \simeq \mathrm{Top}(E, \widehat{C(\mathcal{T}_o)})$.

Dans le cas où $\mathcal{T}_o$ est une théorie algébrique ($\mathcal{L}_o$ est unisorte et n'a pas d'autre symbole relationnel que $=$ et $\mathrm{v}$, les axiomes non logiques sont - à cloture par augmentation et substitution près - des séquents du genre $\vdash \Phi^V$ où $\Phi$ est une formule de $\mathcal{L}_o$ et $V$ l'ensemble de ses variables libres), $C(\mathcal{T}_o)$ est une catégorie "connue": c'est l'opposée de la catégorie des $\mathcal{T}_o$-algèbres de présentation finie.

Soit $\mathrm{APF}(\mathcal{T}_o)$ cette catégorie. On définit un foncteur $R : C(\mathcal{T}_o)^{op} \longrightarrow \mathrm{APF}(\mathcal{T}_o)$ de la façon suivante :

* $\mathcal{L}_o$ étant unisorte un objet de $C(\mathcal{T}_o)$ est un couple $(n,\Phi)$. $\Phi$ est équivalente à une conjonction finie $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_k$ de formules atomiques de $\mathcal{L}_o$, c'est à dire d'identité . $R(n,\Phi)$ sera la $\mathcal{T}_o$-algèbre à $n$ générateurs $a_1,\dots,a_n$ vérifiant les identités $\Phi_1,\dots,\Phi_k$. Un élément de $R(n,\Phi)$ sera un terme de $\mathcal{L}_o$ dont les variables sont parmi

$a_1;\ldots,a_n$ modulo l'équivalence $t \sim t'$ quand $\Phi \vdash t = t'^{a_1,\ldots,a_n}$ est un théorème de $\mathcal{T}_o$.

* Soit $\overline{(t_1,\ldots,t_p)} : (n,\Phi) \longrightarrow (p,\Psi)$ une flèche de $C(\mathcal{T}_o)$. Pour connaître $R(\overline{(t_1,\ldots t_p)})$ il suffit de connaître l'image des $p$ générateurs $b_1,\ldots,b_p$ de $R(p,\Psi)$ dans $R(n,\Phi)$. Ce sera justement les classes d'équivalence des termes $t_1,\ldots,t_p$. Ceci ne dépend pas du représentant choisi puisque $(t_1,\ldots,t_p) \simeq (t'_1,\ldots,t'_p)$ quand $\Phi \vdash t_1 = t'_1 \wedge \ldots \wedge t_p = t'_p{}^{a_1,\ldots,a_n}$ est un théorème de $\mathcal{T}_o$. D'autre part, on définit bien un morphisme de $R(p,\Psi)$ dans $R(n,\Psi)$; Soient $s(b_1,\ldots,b_p)$ et $s'(b_1,\ldots,b_p)$ deux représentants d'un élément de $R(p,\Psi)$. Il faut montrer que $s(t_1,\ldots,t_p)$ et $s'(t_1,\ldots,t_p)$ représentent le même élément de $R(n,\Phi)$. On a comme théorèmes de $\mathcal{T}_o$

$\Psi(b_1,\ldots,b_p) \vdash s(b_1,\ldots,b_p) = s'(b_1,\ldots,b_p)^{b_1,\ldots,b_p}$

donc aussi $\Psi(t_1,\ldots,t_p) \vdash s(t_1,\ldots,t_p) = s'(t_1,\ldots,t_p)^{a_1,\ldots,a_n}$

et d'autre part $\Phi(a_1,\ldots,a_n) \vdash \Psi(t_1,\ldots,t_p)^{a_1,\ldots,a_n}$

Par coupure, $\Phi(a_1,\ldots,a_n) \vdash s(t_1,\ldots,t_p) = s'(t_1,\ldots,t_p)^{a_1,\ldots,a_n}$ est aussi un théorème de $\mathcal{T}_o$, et c'est ce que l'on veut.

Il est facile de voir que $R$ est une équivalence de catégories. Ceci donne le fait que $\mathrm{Ens}^{\mathrm{APF}(\mathcal{T}_o)}$ classifie les $\mathcal{T}_o$-algèbres.

C) <u>Site associé à une théorie cohérente. Application au topos de Zariski.</u>

Soit $\mathcal{T}$ une théorie cohérente dans le langage $\mathcal{L}$. Soit $\mathcal{L}_o$ le langage qui a les mêmes symboles fonctionnels et relationnels que $\mathcal{L}$, mais qui n'a comme connecteurs que $\vee$ et $\wedge$ (les séquents de $\mathcal{L}_o$ ont exactement une formule à droite). Soit $\mathcal{T}_o$ une théorie exprimée dans $\mathcal{L}_o$ et dont tous les théorèmes sont des théorèmes de $\mathcal{T}$.

Si $S$ est un séquent crible de $\mathcal{L}$, on peut lui associer une famille finie $Cr(S)$ de flèches de $C(\mathcal{T}_o)$ qui ont même but. Supposons que S soit

$$\Phi \vdash \exists x^1_1 \ldots \exists x^1_{m_1}\ \Phi_1(x^1_1,\ldots,x^1_{m_1}),\ldots,\ \exists x^k_1 \ldots \exists x^k_{m_k}\ \Phi_k(x^k_1,\ldots,x^k_{m_k})^{a_1,\ldots,a_n}$$

$\Phi$, $\Phi_1,\ldots,\Phi_k$ sont des formules de $\mathcal{L}_o$ et donc $(i_1,\ldots i_n;\ \Phi)$, $(i_1,\ldots,i_n,j^1_1,\ldots,j^1_{m_1};\Phi_1)$ $,\ldots,(i_1,\ldots,i_n,j^k_1,\ldots,j^k_{m_k};\ \Phi_k)$ sont des objets de $C(\mathcal{T}_o)$. Pour tout $i$ entre $1$ et $k$ le n-uple $(a_1,\ldots,a_n)$ représente une flèche $(i_1,\ldots,i_n,j^i_1,\ldots,j^i_{m_i},\ \Phi_i) \longrightarrow (i_1,\ldots,i_n,\ \Phi)$ $Cr(S)$ sera la famille de ces flèches.

Soit $F$ un foncteur exact à gauche de $C(\mathcal{T}_o)$ dans un topos de Grothendieck $E$. $F$ définit un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}_o$ dans $E$ qui est aussi une réalisation de $\mathcal{L}$ dans $E$. Dire que $F(Cr(S))$ est couvrant équivaut à dire que dans cette réalisation le séquent $S$ est valide.

On peut toujours supposer que les axiomes de $\mathcal{T}$ sont des séquents-cribles. L'ensemble des cribles $Cr(S)$ où $S$ parcourt l'ensemble des axiomes de $\mathcal{T}$ engendre une topologie de Grothendieck sur $C(\mathcal{T}_o)$. Ce site sera noté $(C(\mathcal{T}_o),\mathcal{T})$. Un foncteur exact à gauche de ce site dans un topos de Grothendieck $E$ est continu si et seulement si il définit un modèle de $\mathcal{T}$. On a alors une équivalence de catégories

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{T},E) \simeq FC((C(\mathcal{T}_o),\mathcal{T}),E)$$

D'où le

<u>Théorème</u> $\widetilde{(C(\mathcal{T}_o),\mathcal{T})}$ est un topos classifiant des modèles de $\mathcal{T}$.

Appliquons les résultats précédents au cas où $\mathcal{T}$ est la théorie des anneaux locaux et $\mathcal{T}_o$ la théorie des anneaux (commutatifs, unitaires). $C(\mathcal{T}_o)$ est la catégorie opposée de la catégorie des anneaux de présentation finie.

La topologie associée à $\mathcal{T}$ est engendrée par les cribles correspondant aux séquents

$$v \vdash \exists x \quad a \times x = 1 \quad , \quad \exists y (1-a) \times y = 1^{a}$$

$$\emptyset$$

$$0 = 1 \vdash$$

$R(1,v)$ est $\mathbb{Z}[X]$

$R(2,\ a \times b = 1)$ est $\mathbb{Z}[X,Y]/_{(XY-1)}$ c'est à dire $\mathbb{Z}[X]_X$, le localisé de $\mathbb{Z}[X]$ en X.

$R(2,(1-a) \times b = 1)$ est $\mathbb{Z}[X,Y]/_{(1-X)Y-1)}$ c'est à dire $\mathbb{Z}[X]_{1-X}$

$R(0,0 = 1)$ est l'anneau 0

Les cribles qui engendrent la topologie sont donc

* $\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathbb{Z}[X]_X \\ \mathbb{Z}[X] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathbb{Z}[X]_{1-X} \end{tikzcd}$ (Ceci entraîne que pour tout anneau A de présentation finie, pour tout élément a de A, $\begin{tikzcd}[row sep=small] & A_a \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & A_{1-a} \end{tikzcd}$ est couvrant)

* le crible vide pour l'anneau 0.

C'est bien la topologie de Zariski et on retrouve de cette façon le résultat de M. Hakim.