Université de Rennes I
UFR Mathématiques

Licence de mathématiques
Année 2008-2009

ALBI : Algèbre bilinéaire

Corrigé de l'examen du Jeudi 18 Décembre

Question de cours

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$. Soit $F \subset G$ deux sous-espaces vectoriels de E.

1. *Écrire la définition de l'orthogonal F° de F dans l'espace dual E^*.*
   L'orthogonal de F est le sous-espace des formes linéaires $\ell \in E^*$ telles que, pour tout $x \in F$, on a $\ell(x) = 0$. En formule :
   $$F^\circ = \{\ell \in E^* \mid \forall x \in F \ \ell(x) = 0\} .$$
2. *A-t-on $F^\circ \subset G^\circ$ ou $G^\circ \subset F^\circ$? Démontrer la relation d'inclusion convenable.*
   On a $G^\circ \subset F^\circ$. En effet : soit $\ell \in G^\circ$; pour tout $x \in F$, on a $x \in G$ (car $F \subset G$), et donc $\ell(x) = 0$; par conséquent, ℓ appartient à F°.

Exercice 1

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1x_3$.

1. *Écrire la matrice de q dans la base canonique.*
   La matrice de q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. *Quelle est la signature de q ?*
   Décomposons q en carrés selon l'algorithme de Gauss :
   $$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_3)(x_2 + 2x_3) + 2\,x_3^2 \\ &= \frac{1}{4}\left((x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 - x_2 - 3\,x_3)^2\right) + 2\,x_3^2 . \end{aligned}$$
   Cette décomposition faite apparaître que la signature de q est $(2, 1)$.
3. *Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit orthogonale pour q.*
   La décomposition en carrés donne une base (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) de l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ avec
   $$\ell_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3,\ \ell_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - 3\,x_3,\ \ell_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 .$$
   Cette base est duale d'une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q. Les vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont les colonnes de l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont les lignes sont les coeffcients de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Le calcul donne :
   $$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
4. *Quel est le noyau de q ?*
   La forme quadratique q est non dégénérée : le calcul d'une décomposition en carrés a montré qu'elle est de rang 3. Donc son noyau est réduit à $\{0\}$.
5. *Donner un vecteur non nul isotrope pour q.*
   On a $q(1, 0, 0) = 0$, ce qui veut dire que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est isotrope pour q.

Exercice 2

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Trouver une matrice orthogonale $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Quelle est la signature de A ?

Le théorème qui dit qu'un endomorphisme symétrique diagonalise dans une base orthonormale assure l'existence d'une telle matrice P. Puisque A est visiblement de rang 1, 0 est valeur propre de multiplicité au moins 2 ; comme la trace de A, qui vaut 3, est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité, la troisième valeur propre est 3. On aurait pu aussi calculer le polynôme caractéristique de A et trouver ses racines. Puisque A a une valeur propre strictement positive et aucune strictement négative, sa signature est $(1, 0)$.

Le sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0, c.-à-d. le noyau de A, est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas orthogonaux pour le produit scalaire euclidien usuel $(\cdot \mid \cdot)$ de $\mathbb{R}^3$ car $(v_2 \mid v_3) = 1$. On orthogonalise donc la base de E_3 en remplaçant v_3 par

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_2 \mid v_3)}{\|v_2\|^2} v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Alors

$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right)$$

est une base orthonormale de vecteurs propres de A, et la matrice de passage est la matrice orthogonale

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} ,$$

et on a

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel complexe des fonctions continues $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$. Si f et g sont des éléments de E, on pose

$$(f \mid g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \overline{f(t)}\, g(t)\, dt .$$

On note φ l'élément de E défini par $\varphi(t) = e^{it}$. On note F le sous-espace de E formé des fonctions $t \mapsto xt + y$, avec $x, y \in \mathbb{C}$.

1. *Expliquer pourquoi $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire hermitien sur E. On notera dans la suite $\|\cdot\|$ la norme hermitienne associée à ce produit scalaire hermitien.*

   L'application $g \mapsto (f \mid g)$ est linéaire, l'application $f \mapsto (f \mid g)$ est semi-linéaire, on a la symétrie hermitienne : $(g \mid f) = \overline{(f \mid g)}$. Enfin la forme hermitienne $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ est définie positive car $(f \mid f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |f(t)|^2\, dt$ est strictement positive quand f n'est pas la fonction nulle.

2. *Calculer $\|\varphi\|$.*

   On a $\|\varphi\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \overline{e^{it}}\, e^{it}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt = 1$, donc $\|\varphi\| = 1$.

3. *Donner une base de F, une base de F orthogonale pour le produit scalaire hermitien.*
   Le sous-espace F est de dimension 2 et a pour base le couple de fonctions $v_1 : t \mapsto 1$ et $v_2 : t \mapsto t$. On a $(v_1 \mid v_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \frac{\pi}{2}$, donc la base n'est pas orthogonale. On l'orthogonalise en prenant v_1 et

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_1 \mid v_2)}{\|v_1\|^2}\, v_1 = v_2 - \frac{\pi}{2}\, v_1 \ ;$$

   en effet $\|v_1\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dt = 1$. La fonction w_2 est $t \mapsto t - \frac{\pi}{2}$.
4. *On note dans la suite p_F la projection orthogonale sur F (toujours pour le produit scalaire hermitien). Calculer $p_F(\varphi)$.*
   Puisque (v_1, w_2) est une base orthogonale de F, on a :

$$p_F(\varphi) = \frac{(v_1 \mid \varphi)}{\|v_1\|^2}\, v_1 + \frac{(w_2 \mid \varphi)}{\|w_2\|^2}\, w_2 \ .$$

   On calcule ce qui nous manque dans la formule :

$$\begin{aligned}
(v_1 \mid \varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{it}\,dt = \frac{2i}{\pi} \\
(w_2 \mid \varphi) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (t - \frac{\pi}{2})\, e^{it}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\, e^{it}\,dt - i = \frac{1}{\pi}\left(\left[-ite^{it}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -ie^{it}\,dt\right) - i = \frac{-2}{\pi} \\
\|w_2\|^2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (t - \frac{\pi}{2})^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}\,(t - \frac{\pi}{2})^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{12} \ .
\end{aligned}$$

   On obtient finalement :

$$p_F(\varphi) = \frac{2i}{\pi}\, v_1 + \frac{-24}{\pi^3}\, w_2 : t \mapsto \frac{-24}{\pi^3}\, t + \frac{2i}{\pi} + \frac{12}{\pi^2} \ .$$

5. *Soit a et b les nombres complexes tels que $p_F(\varphi)$ est la fonction $t \mapsto at + b$. Montrer que*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - at - b|^2\,dt = \min_{x,y\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - xt - y|^2\,dt\right) \ .$$

   Calculer ce minimum.
   On a $\varphi - p_F(\varphi) : t \mapsto e^{it} - at - b$, et donc $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - at - b|^2\,dt = \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2$. Puisque $\varphi - p_F(\varphi)$ est orthogonal à $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - xt - y|^2\,d &= \|\varphi - xv_2 - yv_1\|^2 \\
&= \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2 + \|p_F(\varphi) - xv_2 - yv_1\|^2 \\
&\geq \|\varphi - p_F(\varphi)\|^2
\end{aligned}$$

   et donc

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - at - b|^2\,dt = \min_{x,y\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - xt - y|^2\,dt\right) \ .$$

   Il reste à calculer $\|\varphi - p_F(\varphi)\|^2 = \|\varphi\|^2 - \|p_F(\varphi)\|^2$; en effet, $p_F(\varphi)$ et $\varphi - p_F(\varphi)$ sont orthogonaux. On a

$$\|p_F(\varphi)\|^2 = \left\|\frac{2i}{\pi}\, v_1 + \frac{-24}{\pi^3}\, w_2\right\|^2 = \frac{4}{\pi^2}\,\|v_1\|^2 + \frac{24^2}{\pi^6}\,\|w_2\|^2 = \frac{4}{\pi^2} + \frac{48}{\pi^4} \ .$$

   Finalement on obtient

$$\min_{x,y\in\mathbb{C}}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |e^{it} - xt - y|^2\,dt\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2} - \frac{48}{\pi^4} \approx 0,102 \ .$$