Géométrie modérée – Corrigé de l'examen du 5 avril 2002

Exercice I

On suppose donnée une structure o-minimale sur un corps réel clos R. Soit $K \subset R^n$ un sous-ensemble définissable fermé borné. Soient f et g deux fonctions définissables continues de K dans R telles que $f^{-1}(0)$ soit contenu dans $g^{-1}(0)$. On suppose qu'il existe x_0 dans l'adhérence de l'ensemble des $x \in K$ tels que $g(x) \neq 0$ et vérifiant $f(x_0) = 0$. On pose

$$\varphi(t) = \inf\{|f(x)| : x \in K \text{ et } |g(x)| = t\} .$$

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ dans R tel que

1. $\varphi(t)$ est bien défini pour tout $t \in R$ tel que $0 \leq t < \varepsilon$, et $\varphi(t) > 0$ pour $0 < t < \varepsilon$,
2. $\varphi : [0, \varepsilon[\to R$ est une fonction définissable continue strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$,
3. pour tout $x \in K$ tel que $|g(x)| < \varepsilon$ on a $\varphi(|g(x)|) \leq |f(x)|$,
4. il existe un chemin continu définissable $\gamma : [0, \varepsilon[\to K$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon[$, $|g(\gamma(t))| = t$ et $|f(\gamma(t))| = \varphi(t)$.

Une solution

Soit $\delta : [0, 1[\to K$ un chemin définissable continu tel que $\delta(0) = x_0$ et $g(\delta(u)) \neq 0$ pour tout $u \in]0, 1[$ (on en trouve d'après l'hypothèse sur x_0 et le lemme de sélection des courbes). La fonction $\lambda : u \mapsto |g(\delta(u))|$ est définissable continue, $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(u)$ est strictement positif pour $u \in]0, 1[$. D'après le théorème de monotonie, il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que λ soit strictement croissante sur $[0, \rho[$. On a $\lambda([0, \rho[) = [0, \epsilon_1[$ pour un certain $\epsilon_1 > 0$, et λ est un homéomorphisme croissant de $[0, \rho[$ sur $[0, \epsilon_1[$. Notons $\theta : [0, \epsilon_1[\to [0, \rho[$ l'homéomorphisme définissable inverse.

Pour $t \geq 0$ dans R, posons $C_t = \{x \in K : |g(x)| = t\}$. D'après ce qui précède, on a $C_t \neq \emptyset$ pour $t \in [0, \epsilon_1[$. Comme C_t est définissable fermé borné et que $|f|$ est définissable continue, elle atteint sa borne inférieure sur C_t. On en conclut que $\varphi(t)$ est défini pour $t \in [0, \epsilon_1[$, $\varphi(t) > 0$ pour $t > 0$ (car f ne s'annule pas sur C_t), et $\varphi(0) = 0$ (car $x_0 \in C_0$).

La fonction φ est définissable. Elle vérifie $\varphi(|g(x)|) \leq |f(x)|$ par définition. Montrons qu'elle est continue en 0. On a

$$0 \leq \varphi(t) = \varphi(|g(\delta(\theta(t)))| \leq |f(\delta(\theta(t)))| .$$

Or, quand t tend vers 0, $\delta(\theta(t))$ tend vers x_0 et $|f(\delta(\theta(t)))|$ tend vers 0. Donc $\varphi(t)$ tend vers $\varphi(0) = 0$ quand t tend vers 0.

Avec ce qui précède et le théorème de monotonie, on déduit qu'il existe $\epsilon_2 \in]0, \epsilon_1]$ tel que φ soit continue strictement croissante sur $[0, \epsilon_1[$.

Il reste à montrer le point 4. Considérons $X = \{x \in K : \varphi(|g(x)|) = |f(x)|\}$ et la fonction définissable $x \mapsto |g(x)|$ de X dans R. L'image de cette fonction contient $]0, \epsilon_2[$. D'après le choix définissable et la continuité par morceaux, on peut trouver $\epsilon \in]0, \epsilon_2]$ et une fonction définissable continue $\gamma :]0, \epsilon[\to X$ telle que $|g(\gamma(t))| = t$ pour tout $t \in]0, \epsilon[$, et forcément $|f(\gamma(t))| = \varphi(t)$ puisque $\gamma(t) \in X$. Comme K est définissable fermé borné, γ se prolonge par continuité en $\gamma : [0, \epsilon[\to K$. Par continuité, $|g(\gamma(0))| = |f(\gamma(0))| = 0$.

Exercice II

On suppose donnée une structure o-minimale sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Soit $S \subset \mathbb{R}^p$ un sous-ensemble définissable

1. Soit $f : S \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction définissable. Pour tout $t \in S$, on note $f_t : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_t(x) = f(t,x)$. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour chaque $t \in S$, il existe une subdivision

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{N-1} < a_N = 1$$

de $[0,1]$ en N intervalles telle que, sur chaque intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, f est strictement croissante ou décroissante au sens large.

2. Soit $\gamma : S \times [0,1] \to [0,1]^n$ une fonction définissable. Pour tout $t \in S$, on note $\gamma_t : [0,1] \to [0,1]^n$ la fonction définie par $\gamma_t(x) = \gamma(t,x)$. On suppose que le chemin paramétré γ_t est continu pour tout $t \in [0,1]$. On admet que γ_t est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et donc rectifiable. Montrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $t \in S$, la longueur du chemin γ_t soit majorée par M. (Indication : trouver une borne pour la longueur d'un chemin paramétré dans $[0,1]^n$ dont toutes les coordonnées sont monotones).

Une solution

1) Soit A l'ensemble des (t,a) dans $S \times [0,1]$ tels que $a = 0$, ou $a = 1$, ou f_t est strictement croissante sur un intervalle $]a-\epsilon, a[$ et croissante au sens large sur $]a, a+\epsilon[$, ou vice-versa. L'ensemble A est définissable. D'après le théorème de monotonie, pour chaque $t \in S$ l'ensemble $A_t = \{a \in [0,1] : (t,a) \in A\}$ est fini, et sur chaque intervalle ouvert délimité par les points de A_t la fonction f_t est strictement croissante ou décroissante au sens large. D'après le théorème de finitude uniforme, il existe un entier N tel que, pour tout $t \in S$, le cardinal de A_t soit $\leq N+1$. Quitte à ajouter des points de subdivision pour arriver à $N+1$, on a bien le résultat.

2) D'après le 1 appliqué à chaque coordonnée de γ, il existe un entier K tel que, pour chaque $t \in S$ on peut subdiviser $[0,1]$ en K intervalles où chaque coordonnée $\gamma_{t,i}$ de γ_t est monotone. Sur chacun de ces intervalles $[a,b]$ on a

$$\int_a^b \|\gamma_t'(u)\|\, du \leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma_{t,i}(b) - \gamma_{t,i}(a)| \leq n\ .$$

Donc, pour tout $t \in S$, la longueur de γ_t est majorée par Kn.