UE7 – MA5 : Analyse

Corrigé du Partiel d'Analyse du 18 novembre 2000

Exercice 1 (4 points)

Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \, \sin\left(\frac{1}{t}\right) \, dt$.

La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \, \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue, donc localement intégrable sur $]0\,,+\infty[$. La convergence de l'intégrale de f sur $]0\,,+\infty[$ équivaut donc à la convergence des deux intégrales de f sur $]0\,,1]$ et sur $[1\,,+\infty[$.

Sur $]0\,,1]$ la fonction n'a pas de signe constant mais $|f(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{t}}$ a une intégrale convergente sur $]0\,,1]$, l'intégrale de f sur $]0\,,1]$ est absolument convergente.

Sur $[1\,,+\infty[$ f est positive ce qui justifie l'utilisation d'équivalent. Comme $\sin\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t}$ $(t \to +\infty)$, on a $f(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ $(t \to +\infty)$. Les intégrales de f et de $\frac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1\,,+\infty[$ sont donc de même nature, donc convergentes puisque l'intégrale de $\frac{1}{t^{3/2}}$ sur $[1\,,+\infty[$ l'est.

Exercice 2 (11 points)

Pour $x \in\ ]-1\,,1[$ on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$.

Il n'est pas conseillé de chercher à calculer cette intégrale !

1) Préciser le signe $(> 0\,, < 0$ ou $= 0)$ de $f(x)$ suivant les valeurs de $x \in\ ]-1\,,1[$.

2) Montrer que $-f(x) \leq \frac{x-x^2}{\sqrt{1-x^3}}$ pour $x \in [0\,,1[$. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 1.

3) Justifier la dérivabilité de f sur $]-1\,,1[$ et calculer sa dérivée.

4) $f(x)$ a-t-elle une limite quand x tend vers -1 ?

1) La fonction intégrée est continue et strictement positive sur $]-1\,,1[$ donc $f(x)$ est strictement positive, strictement négative ou nulle selon que $x < x^2$, $x > x^2$ ou $x = x^2$ respectivement. On a donc :

$f(x) > 0$ si et seulement si $x \in\ ]-1\,,0[$

$f(x) < 0$ si et seulement si $x \in \left]0\,,\,1\right[$

$f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$

2) Sur $[0\,,\,1[$ on a $-f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \geq 0$ et on peut majorer l'intégrale par le produit de la longueur de l'intervalle $(x - x^2)$ par le maximum de la fonction intégrée sur $[x^2\,,\,x]$. Comme la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ est croissante sur cet intervalle, elle est majorée par sa valeur en x et on obtient le résultat annoncé.

La fonction $g(x) = \dfrac{x-x^2}{\sqrt{1-x^3}} = \dfrac{x(1-x)^{2/3}}{\sqrt{1+x+x^2}}$ tendant vers 0 quand x tend vers 1^-, la majoration précédente, qui s'écrit aussi $|f(x)| \leq g(x)$, montre que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1^-.

3) La fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ continue sur $]-1\,,\,1[$ y admet des primitives et si on désigne par h une de ces primitives on a : $f(x) = h(x^2) - h(x)$. Comme h, primitive, est dérivable il en est de même de f et on a : $f\,'(x) = 2x\,.\,h'(x^2) - h'(x)$, soit finalement : $f\,'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^6}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$.

4) La fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ étant continue sur $[-1\,,\,0]$, $\displaystyle\int_{x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ a pour limite $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ quand x tend vers -1^+ . Par suite, $f(x)$ aura une limite quand x tend vers -1^+ si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ a une limite, c'est-à-dire si et seulement si l'intégrale de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ sur $[0\,,\,1[$ est convergente.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ est positive et équivalente en 1^- à $\dfrac{1}{\sqrt{3}\,(1-t)^{1/2}}$, l'intégrale de $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^3}}$ sur $[0\,,\,1[$ est convergente comme celle de $(1-t)^{-1/2}$. La fonction $f(x)$ a donc une limite quand x tend vers -1^+ .