Université de Rennes 1 — UFR Mathématiques
Année 2000-2001

DEUG Sciences 2ème année MASS et MIAS
UE7 - MA5 : Analyse
Corrigé résumé de l'examen de Septembre 2001

Questions de cours

1) Si les fonctions a et b sont dérivables, alors Φ est dérivable et $\Phi'(x) = b'(x)f(b(x)) - a'(x)f(a(x))$.

2)

a) Si (g_n) converge uniformément vers g sur I, alors g est continue sur I.

b) Si la suite des dérivées (g'_n) converge uniformément sur I, alors g est dérivable.

c) Si (g_n) converge uniformément sur I, alors $\int_a^b g_n(t)\,dt$ converge vers $\int_a^b g(t)\,dt$.

Exercice I

1) On a, pour n entier > 0,

$$\left|\frac{n^2\cos(n^2)}{n^4+1}\right| \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}\ .$$

Comme la série de terme général $1/n^2$ converge, la série proposée converge absolument.

2) On a :

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n}\right)^{a+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-a-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \exp\left((\alpha - a - \frac{1}{n})\log n\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < a \\ +\infty & \text{si } \alpha > a \\ 1 & \text{si } \alpha = a \end{cases}\ .$$

La règle de Riemann permet de conclure que la série converge si $a > 1$ (prendre $1 < \alpha < a$) et diverge si $a \leq 1$ (prendre $a \leq \alpha \leq 1$).

Exercice II

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+|x|}$.

a) Pour x fixé, $1/(n+|x|)$ tend vers 0 en décroissant, et donc $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) La borne supérieure de $|u_n(x)|$ pour $n \geq 1$ fixé et x parcourant $\mathbb{R}$ est $1/n$. Comme la série de terme général $1/n$ diverge, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

c) Posons $S(x) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x)$. Vu que la série est alternée et que $|u_n(x)| = 1/(n+|x|)$ tend vers 0 en décroissant, on peut majorer la valeur absolue des restes de la façon suivante :

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{n+1+|x|} \leq \frac{1}{n+1}\ .$$

On a majoré le reste indépendamment de x par une quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice III

1) Si x appartient à $]0,+\infty[$, les bornes $1/x$ et x^2 sont aussi dans $]0,+\infty[$. Comme la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{1+t^3}$ est continue sur $]0,+\infty[$, l'intégrale $\Phi(x)$ est bien définie.

2) On a $1/\sqrt{1+t^3} > 0$ pour $t \in]0,+\infty[$. Le signe de l'intégrale $\Phi(x)$ dépend donc de l'ordre des bornes $1/x$ et x^2. On a $\Phi(x) < 0$ pour $0 < x < 1$, $\Phi(x) = 0$ pour $x = 1$ et $\Phi(x) > 0$ pour $x > 1$.

3) On a (cf question de cours 1) :

$$\Phi'(x) = 2x \frac{1}{\sqrt{1+x^6}} - \left(\frac{-1}{x^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^6}} + \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^3}} .$$

On constate que $\Phi'(x)$ est strictement positif pour tout x dans $]0,+\infty[$. Donc Φ est croissante sur $]0,+\infty[$.

4) Soit F la primitive de $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0 :

$$F(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} .$$

On a alors $\Phi(x) = F(x^2) - F(1/x)$.

Comme $\sqrt{1+t^3}$ est équivalent à $t^{3/2}$ quand t tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ est convergente, et sa valeur est la limite de $F(y)$ quand y tend vers $+\infty$. C'est par conséquent aussi la limite de $F(x^2)$ quand x tend vers $+\infty$ et la limite de $F(1/x)$ quand x tend vers 0_+.

Par ailleurs, puisque F est continue sur $]-1,+\infty[$, la limite de $F(x^2)$ quand $x \to 0_+$ et celle de $F(1/x)$ quand $x \to +\infty$ sont toutes les deux égales à $F(0) = 0$.

On obtient donc

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = -\lim_{x\to 0_+} \Phi(x) ,$$

où l'intégrale est bien convergente