DEUG Sciences 2ème année MASS et MIAS
UE7 – MA5 : Algèbre
Corrigé de l'examen du 18 janvier 2002

Exercice I

1) On détermine facilement les polynômes caractéristiques des matrices $A_1, \ldots, A_4$. On trouve

$$P_{A_1}(X) = P_{A_2}(X) = P_{A_3}(X) = (1-X)(2-X)^2$$

et $P_{A_4}(X) = -X(1-X)(2-X)$. A noter que, pour une matrice triangulaire, le déterminant est égal au produit des coefficients sur la diagonale, ce qui facilite le calcul de P_{A_1}, P_{A_3} et P_{A_4}, dont on trouve en même temps la factorisation.
Pour A_1, A_2 et A_3, les valeurs propres sont 1 (de multiplicité 1) et 2 (de multiplicité 2). Pour chacune de ces matrices, on sait (sans calculer l'espace propre) que la dimension de l'espace propre associé à 1 est de dimension 1 : cette dimension est au moins égale à 1 parce que 1 est valeur propre et au plus égale à 1 car 1 est valeur propre de multiplicité 1. Chacune de ces trois matrices est donc diagonalisable si et seulement si l'espace propre associé à 2 est de dimension 2. L'espace propre de 2 étant le noyau de $A_i - 2\mathrm{I}$, le calcul de ce noyau montre que A_1 n'est pas diagonalisable tandis que A_2 et A_3 le sont.
Le polynôme caractéristique de A_4 est scindé à racines simples, donc A_4 est diagonalisable.

2) L'énoncé de la 2ème question de cours implique que A_4, dont le polynôme caractéristique est différent de celui de A_1, A_2 et A_3 n'est semblable au aucune de ces matrices. On ne peut par ailleurs tirer aucune autre conclusion de cet énoncé : le fait que deux matrices ont le même polynôme caractéristique n'implique pas que elles sont semblables.
Pour traiter le reste de la question, on utilise la remarque suivante. Soient A, B et C des matrices carrées telles que A soit semblable à B et B semblable à C. Il existe alors des matrices inversibles P et Q telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$, donc $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$ et cela montre que A est semblable à C.
Dans la partie précédente, on a vu que A_2 et A_3 ont polynôme minimal $(1-X)(2-X)^2$ et sont toutes les deux diagonalisables. Les deux sont donc semblables à

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la remarque précédente, on conclut que A_2 et A_3 sont semblables.
D'autre part, si A_1 est semblable à A_2 ou à A_3, le même raisonnement montre qu'elle est aussi semblable à D. Comme A_1 n'est pas diagonalisable, c'est une contradiction et cela montre que A_1 n'est semblable à aucune des autres matrices.

Exercice II

1) D'après la définition de F, la famille $\mathcal{C}$ engendre F donc, pour montrer que $\mathcal{C}$ est une base de F, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est libre. Si $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$, alors

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 - (\lambda + \lambda_2 + \lambda_3)e_4 = 0.$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base, cela implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On a ainsi montré que $\mathcal{C}$ est libre.

2) En utilisant la matrice de f, on trouve

$$f(c_1) = (0,-1,0,1) = -c_2 \in F,\ \ f(c_2) = (1,-2,-1,2) = c_1 - 2c_2 - c_3 \in F \text{ et}$$

$$f(c_3) = (-4,-1,0,5) = -4c_1 - c_2 \in F.$$

Si v est un élément quelconque de F, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $v = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$. Il s'ensuit que $f(v) = \lambda_1 f(c_1) + \lambda_2 f(c_2) + \lambda_3 f(c_3)$ est une combinaison linéaire d'éléments de F donc $f(v) \in F$.

3) Par définition, la $i$ème colonne de la matrice M est le vecteur des coefficients de $f(c_i)$ par rapport à la base $\mathcal{C}$. Le calcul fait dans la partie précédente montre donc que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct, avec le règle de Sarrus par exemple, donne $P_M(X) = -X^3 - 2X^2 - 4$.

4) Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est une famille génératrice. Or, $e_1 = c_1 - e_4$, $e_2 = c_2 - e_4$ et $e_3 = c_3 - e_4$, ce qui montre que e_1, e_2, e_3 et e_4 appartiennent à l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{D}$. Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, cela implique que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\mathcal{D}$ contient $\mathbb{R}^4$, donc que $\mathcal{D}$ engendre $\mathbb{R}^4$.
Le calcul précédent donne les trois premières colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(f)$. Pour la dernière, on calcule les coordonnés de $f(e_4)$ par rapport à la base $\mathcal{D}$, on trouve $f(e_4) = (1, 1, 1, -3) = c_1 + c_2 + c_3$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Comme A et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(f)$ sont les matrices de A par rapport à deux base différentes de $\mathbb{R}^4$, elles sont semblables et ont donc le même polynôme caractéristique. En développant suivant la dernière ligne, on trouve

$$P_A(X) = -XP_M(X) = X^4 + 2X^3 + 4X.$$

Exercice III

1) On a

$$u^2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = u\left(\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix} = u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

d'où $u^2 = u$. Il s'ensuit que $u^2 - u = 0$, donc le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u.

2) Le polynôme $X^2 - X = X(X - 1)$ est scindé à racines simples et c'est un polynôme annulateur de u. Il s'ensuit que u est diagonalisable.

3) Les valeurs propres de u sont parmi les racines du polynôme $X^2 - X$, donc les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1. Pour montrer que ce sont effectivement des valeur propres de u, il suffit de trouver un vecteur propre associé à chacun. Comme

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres associés à 0 et 1 respectivement. La conclusion est les valeurs propres de u sont 0 et 1.

Remarque. On peut résoudre cet exercice d'une autre façon (plus longue). Pour trouver un polynôme annulateur et les valeurs propres de u, on peut calculer son polynôme caractéristique. Pour cela, il faut calculer la matrice de u par rapport à une base de $M_2(\mathbb{R})$, par exemple la base canonique. On trouvera ainsi une matrice de taille 4×4, dont le polynôme caractéristique est $X^2(X - 1)^2$. Pour savoir si u est diagonalisable, il faut alors déterminer les espaces propres associés à 0 et à 1.