MA5 algèbre – Corrigé succinct de l'examen du 7 janvier 2003

Question de cours. Les endomorphismes f et $P(f)$ commutent.

Montrons que $\ker P(f)$ est stable par f. Soit $x \in \ker P(f)$, ce qui veut dire $P(f)(x) = 0$. On a $P(f)(f(x)) = f(P(f)(x)) = f(0) = 0$, et donc $f(x)$ appartient à $\ker P(f)$.

Montrons que l'image de $P(f)$ est stable par f. Soit y dans l'image de $P(f)$, ce qui veut dire qu'il existe $x \in E$ tel que $P(f)(x) = y$. Alors $f(y) = f(P(f)(x)) = P(f)(f(x))$, ce qui montre que $f(y)$ appartient à l'image de $P(f)$.

Exercice 1. Le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est $X^2(X-2)^2$. Il est scindé et les valeurs propres de B sont 0 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 2.

1) Le sous-espace propre E_0 associé à la valeur propre 0 est de dimension 1 et engendré par $v_1 = (1,1,1,1)$. Le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est de dimension 2 et a une base formée par les deux vecteurs $v_3 = (1,0,0,1)$ et $v_4 = (0,1,1,1)$. Ces résultats s'onbtiennent par résolution de systèmes linéaires.

On sait que les sous-espaces caractéristiques N_0 et N_2 sont tous les deux de dimension 2 (la multiplicité des valeurs propres), et qu'ils contiennent les sous-espaces propres E_0 et E_2 respectivement. On a donc déjà, sans calcul, $N_2 = E_2$. N_0 est le noyau de $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. La résolution du ssystème linéaire montre qu'on a une base de N_0 formée de v_1 et $v_2 = (0,1,2,0)$.

2) On a $Bv_1 = 0$, $Bv_3 = 2v_3$, $Bv_4 = 2v_4$ et on calcule $Bv_2 = -v_1$. La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base (v_1, v_2, v_3, v_4) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C$.

3) On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = C - D$. La vérification de $D = \frac{1}{2}C^2$ et $DN = ND$ est un calcul matriciel immédiat .

4) On pose $D' = \frac{1}{2}B^2$ et $N' = B - D'$. On a $D = \frac{1}{2}C^2 = P^{-1}(\frac{1}{2}B^2)P = P^{-1}D'P$, ce qui montre que D' est diagonalisable. On a $N' = PNP^{-1}$ et $N^2 = 0$, et donc $N'^2 = 0$. Enfin N' et D' commutent car ce sont deux polynômes en B.

Exercice 2. E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré ≤ 3 et, pour $P \in E$, $f(P)$ est le reste de la division euclidienne de XP par $S = X(X^3-1)$.

1) On montre que pour tout complexe λ et tous P, Q dans E, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$. Il faut remarquer que $\lambda f(P) + f(Q)$ est de degré ≤ 3 et est donc bien le reste de la division de $\lambda P + Q$ par S.

2) Le polynôme XP est divisible par S si et seulement si P est divisisble par X^3-1. Puisque $\deg P \leq 3$ ceci revient à dire que $P = c(X^3-1)$ avec $c \in \mathbb{C}$.

3) On a $\ker f = \mathrm{Vect}(X^3-1)$ d'après la question précédente.

4) On a $f(1) = X$, $f(X) = X^2$, $f(X^2) = X^3$ et $f(X^3) = X$.

5) Grâce à la question précédente, on montre que $f^4(X^i) = f(X^i)$ pour $i = 0, \ldots, 3$. Donc $f^4 = f$ et $S = X^4 - X$ est polynôme annulateur de f.

6) Le polynôme S est scindé *à racines simples* $0, 1, j, j^2$ (on travaille sur $\mathbb{C}$). Donc f est diagonalisable.