UNIVERSITE de RENNES 1
UFR Mathématiques
2000 - 2001

DEUG 2ème année MASS et MIAS
UE7 - MA5 : Analyse
2ème Session
Durée : 2 heures
Les documents et calculettes ne sont pas autorisés.

Questions de cours (les deux questions sont indépendantes) ***(5 points)***

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.
Soient a et b deux fonctions d'un intervalle J à valeurs dans I.
Pour x dans J, on pose $\Phi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$.
Donner des conditions suffisantes sur a et b pour que Φ soit dérivable, et donner la formule pour $\Phi'(x)$.

2) Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continûment dérivables sur un intervalle I, à valeurs réelles. On suppose que la suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur I. Dans chacun des trois cas suivants, donner des conditions suffisantes pour que la propriété énoncée soit vraie.
a) g continue sur I
b) g dérivable sur I
c) pour tous a, b dans I : $\int_a^b g(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b g_n(t)\, dt$.

Exercice 1 : Séries numériques ***(3 points)***

1) La série de terme général $\frac{n^2 \cos(n^2)}{n^4 + 1}$ est-elle convergente ?

2) Soit a un paramètre réel.
Discuter suivant la valeur de a la convergence de la série de terme général $\left(\frac{1}{n}\right)^{a + \frac{1}{n}}$ (pour $n \geq 1$).

Exercice 2 : Séries de fonctions ***(5 points)***

On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + |x|}$ pour $n \geq 1$.

Cette série converge-t-elle :
a) simplement sur $\mathbb{R}$?
b) normalement sur $\mathbb{R}$?
c) uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 : Intégrales ***(7 points)***

On pose $\Phi(x) = \int_{1/x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^3}}$.

1) Montrer que Φ est définie sur $]0, +\infty[$.
2) Etudier le signe de Φ sur $]0, +\infty[$.
3) Calculer la dérivée de Φ sur $]0, +\infty[$. Préciser le sens de variation de Φ sur $]0, +\infty[$.
4) Montrer que Φ admet des limites quand $x \to 0_+$ et quand $x \to +\infty$.
Quelle relation y a-t-il entre ces deux limites ?