SERIES ENTIERES

Une série entière est une série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ dont le terme général est de la forme :

$$f_n(x) = a_n x^n \quad (f_0(x) = a_0)$$

où les a_n sont des scalaires réels ou complexes et où la variable x est, suivant les cas, réelle ou complexe.

La série est aussi notée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et a_n est appelé n–$i\smallsetminus me$ coefficient de la série entière.

Trois problèmes principaux se posent pour ces séries :

1) Etudier le domaine de convergence d'une série entière.
2) Etudier les propriétés de la fonction somme d'une série entière.
3) Est-il possible d'obtenir les fonctions "usuelles" comme sommes de séries entières ?

I. Etude de la convergence

Dans ce paragraphe, la variable x sera complexe.

Lemme (Abel)

Etant donnée une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, s'il existe un r strictement positif tel que la suite $(|a_n|\, r^n)$ soit bornée, alors pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < r$ la série entière est absolument convergente.

Définition

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière.

L'ensemble des réels r positifs ou nuls tel que la suite$(|a_n|\, r^n)$ soit bornée est non vide car il contient au moins $r = 0$. Il admet donc une borne supérieure R, appelée rayon de convergence , qui est un nombre réel positif ou nul quand cet ensemble est majoré et $+\infty$ quand cet ensemble n'est pas majoré.

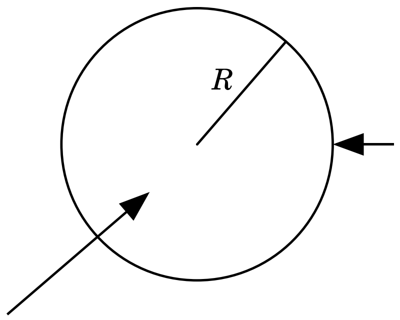
Théorème

Avec la définition précédente :

1) Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

2) Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| > R$, le terme général $a_n x^n$ ne tend pas vers 0 et la série est grossièrement divergente.

A l'extérieur du disque, la série diverge grossièrement



Sur le cercle, il peut se passer n'importe quoi

A l'intérieur du disque, la série converge absolument

Remarque
Si $R = 0$, le théorème se réduit au 2).
Si $R = +\infty$, le théorème se réduit au 1) : la série converge absolument pour tout x .

Remarque
Le théorème n'envisage pas le cas $|x| = R$ car des situations très différentes peuvent arriver dans ce cas, comme le montrent les exemples suivants :

$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ $\quad R = 1$ et la série converge pour tout x tel que $|x| = 1$

$\sum_{n\geq o} x^n$ $\quad R = 1$ et la série diverge pour tout x tel que $|x| = 1$

Le théorème précédent donne les propriétés suivantes :

(1) Si la série converge en un $x_0 \in \mathbb{C}$ alors $R \geq |x_0|$

(2) Si la série diverge en un $x_0 \in \mathbb{C}$ alors $R \leq |x_0|$

(3) S'il existe $\rho > 0$ tel que la série converge pour tout x tel que $|x| < \rho$, et diverge pour tout x tel que $|x| > \rho$ alors $R = \rho$.

Par exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ a un rayon égal à 1 puisqu'elle converge pour $x = -1$ et diverge pour $x = 1$.

Détermination du rayon de convergence
Elle peut souvent se faire à partir des règles de d'Alembert ou de Cauchy vues pour les séries numériques.

Proposition

Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ pour tous les n à partir d'un certain n_0 et telle que $\left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ait une limite ℓ finie ou $+\infty$.

Alors le rayon de convergence de la série est $R = \dfrac{1}{\ell}$, avec les conventions $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et $R = 0$ si $\ell = +\infty$.

Exemple

1) $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{n-3}{n^2+1} 3^n x^n$ a pour rayon de convergence $\dfrac{1}{3}$.

2) $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

3) $\sum\limits_{n \geq 0} n!\, x^n$ a un rayon de convergence nul.

Remarque

La méthode précédente peut être adaptée à des séries ayant une infinité de a_n nuls.

Par exemple pour $\sum\limits_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$ avec $a_{2n} \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| = \ell$ (ℓ fini ou $+\infty$) on obtient $R = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$ (toujours avec les conventions adoptées si ℓ est nul ou infini).

Proposition

Soit $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière telle que $\sqrt[n]{|a_n|}$ ait une limite ℓ finie ou $+\infty$.

Alors le rayon de convergence de la série est $R = \dfrac{1}{\ell}$ (avec les mêmes conventions que précé-demment).

Exemples

1) $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2} x^n$ a pour rayon de convergence $\dfrac{1}{e}$.

2) $\sum \left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)^n x^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \; z^n$; $\sum \dfrac{n^n}{n!} \; z^n$; $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^n} \; z^n$; $\sum \dfrac{ch\, n}{n} \; z^n$

$\sum (n^{1/n} - 1) \; z^n$; $\sum arcos \dfrac{n-1}{n} \; z^n$; $\sum \dfrac{sh\, n}{ch^2\, n} \; z^n$

b) $\sum \dfrac{(-2)^n}{n+1} \; z^{3n+1}$; $\sum a^n \; z^{2n+1}$; $\sum\limits_{p \text{ premier}} z^p$; $\sum n! \; z^{n^2}$

$\sum a_n z^n$ lorsque $a_{3p} = \dfrac{1}{2^{3p}}$, $a_{3p+1} = 0$, $a_{3p+2} = 3^{3p+2}$

c) $\sum \left(ch \dfrac{1}{n} \right)^{-n^\alpha} z^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $\sum u_n z^n$; (u_n) est définie par $u_{2p} = a^{2p}$, $u_{2p+1} = b^{2p+1}$, $a > 0$ et $b > 0$

e) $\sum \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right)^{n^2} z^n$

f) $\sum a_n z^n$, où a_n est la n–ième décimale du nombre π .

g) Soit k un réel .

Montrer que les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

h) Montrer que si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ n'est pas nul, la série $\sum \dfrac{a_n}{n!} \; z^n$ converge pour tout z .

Exercice 2

Soient R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

On suppose que la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n} \right)$ converge vers ℓ . Comparer R et R'.

Exercice 3

Soit (a_n) une suite complexe. Montrer l'équivalence des deux propriétés :

(1) Il existe $K > 0$ tel que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{K}{n}$ pour tout n .

(2) Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n \geq 0} n!\, a_n x^n$ est strictement positif.

Exercice 4

Soit (a_n) une suite de réels strictements positifs.

On suppose que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ n'est pas nul et on pose $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_n x^n$ pour $x \in]-R\,, +R[$. Montrer que si R est fini et $\sum a_n R^n$ diverge, alors $\lim\limits_{x \to R^-} f = +\infty$.

Si (b_n) est une suite équivalente à (a_n) , montrer que $\sum b_n x^n$ a même rayon de convergence R et que les fonctions f et g définie par $g(x) = \sum\limits_0^\infty b_n x^n$ sont équivalentes au voisinage de R (même si R est infini).

II. Propriétés de la somme d'une série entière

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors pour r tel que $0 \leq r < R$, la série converge normalement sur le disque fermé $\overline{D_r} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$.

Ce théorème et celui vu sur la continuité des séries de fonctions fournit alors :

Théorème de continuité

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la fonction somme de cette série entière est définie et continue pour x réel dans l'intervalle $]-R\,, R[$.

Pour l'étude de la dérivabilité de la somme d'une série entière, le point essentiel est le suivant :

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors la série des dérivées $\sum (n+1)\ a_{n+1}\, x^n$ a le même rayon de convergence R .

Ce théorème et celui vu sur la dérivabilité des séries de fonctions fournit alors :

Théorème de dérivabilité

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors la fonction somme de cette série entière, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $]-R\ ,R[$

et on a : $\forall x \in\ ]-R\ ,R[\ ,\ f\,'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ a_{n+1}\, x^n$.

Exemple 1

La formule $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ valable pour $|x| < 1$ fournit par application du théorème de dérivation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{pour } x \in\ ]-1\ ,1[$$

puis à nouveau $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\ x^n = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad \ldots$$

Exemple 2

La fonction définie sur $]-1\ ,1[$ par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ fournit par dérivation sur $]-1\ ,1[$: $f\,'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^n$ donc $f\,'(x) = \frac{1}{1+x}$ et par suite $f(x) = \ell n(1+x)$ en tenant compte de $f(0) = 0$.

Par récurrence, le théorème précédent conduit à :

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout entier $k \geq 0$, la série des dérivées k–i\mes $\sum (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\, a_{n+k}\, x^n$ a le même rayon de convergence R. De plus, la fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est indéfiniment dérivable sur $]-R\,,R[$ et pour tout $x \in\,]-R\,,R[$ et tout $k \geq 0$, on a : $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)$ $a_{n+k}\, x^n$.

Corollaire 1

Si f définie sur $]-R\,,R[$ avec $R > 0$ peut s'écrire comme somme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ alors f est C^∞ sur $]-R\,,R[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n\,!}$.

Corollaire 2

Si pour tout $x \in\,]-R\,,R[$ avec $R > 0$ deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont convergentes et si elles vérifient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, alors on a $a_n = b_n$ pour tout n .

Exercice 5

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum n z^n$; $\sum n^2 z^n$; $\sum n^3 z^n$; $\sum (2n+1)\, z^n$; $\sum \dfrac{n^2+1}{n!}\, z^n$; $\sum \dfrac{2n+1}{n^2-1}\, x^n$ et $\sum \dfrac{1}{(n-1)\,(n+2)}\, x^n$ (x réel) .

En déduire la somme des séries $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)\,(n+2)}$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n-1)\,(n+2)}$; $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{(2n+1)\,!}\, x^n$ (x réel) ; $\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3p}}{(3p)!}$ et $\sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^{4p-1}}{(4p-1)!}$.

Exercice 6

Soit (a_n) une suite de réels, décroissante, de limite 0 .

Montrer que $\sum (-1)^n \ a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\ ,1]$. En déduire $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 7

Soit $\sum \ a_n$ une série de nombres complexes absolument convergente.

Montrer que $\sum \ a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{D} = \{z \,/\, |z| \leq 1\}$.

Soit $f(x) = x\ arctan\ x - \frac{1}{2}\ \ell n\ (1 + \ x^2)$.

Calculer une série $\sum \ b_n$ absolument convergente telle que $f(x) = \sum_0^{\infty} \ b_n x^n$ pour tout $x \in [-1\ ,\ 1]$

.

Exercice 8

Exprimer comme somme de séries numériques les intégrales :

$$\int_0^1 \frac{arctan\,x}{x}\ dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\ell n\,(1+x)}{x}\ dx$$

Exercice 9

Soit $(k\ ,\ \theta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n(k,\theta) = k^{2n+1}\ cos(2n+1)\ \theta$ et $v_n(k,\theta) = \frac{k^{2n+1}}{2n+1}\ \ sin(2n+1)\ \theta$.

Calculer la somme des séries $\sum_0^{\infty} u_n$ et $\sum_0^{\infty} v_n$.

En déduire, pour $\theta \in\ ]0,\pi[$ la valeur de $\sum_0^{\infty} \frac{sin\,(2n+1)\,\theta}{2n+1}$.

III. Sommes et produits de séries entières

Théorème

Soient $\sum \ a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R' et $\sum \ b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R''.

Alors la série entière $\sum (a_n + \ b_n)\ x^n$ a un rayon de convergence $R \geq Min(R'\ , R'')$.

De plus, pour $|x| < Min(R'\ , R'')$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + \ b_n)\ x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \ a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \ b_n x^n$.

Enfin si $R' \neq R''$, alors $R = Min(R'\ , R'')$.

Théorème

Soient $\sum\ a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R' et $\sum\ b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R''.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose : $c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

Alors la série $\sum\ c_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq Min(R'\,, R'')$.

De plus, pour tout $|x| < Min(R'\,, R'')$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$.

Ce théorème se démontre à partir du résultat suivant sur les séries numériques :

Théorème

Soient $\sum\ u_n$ et $\sum\ v_n$ deux séries numériques absolument convergentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $w_n = u_0\, v_n + u_1\, v_{n-1} + \cdots + u_n\, v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$.

Alors la série $\sum\ w_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.

Exemple

A partir de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$, on obtient $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$ x^n pour $|x| < 1$, soit $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ x^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ déjà obtenu par dérivation.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite de réels définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

1) Montrer que, pour $n \geq 1$, on a : $0 < u_n \leq 2^{n-1}$.

En déduire que le rayon de convergence R de $\sum\ u_n z^n$ est strictement positif.

2) On pose, pour $|z| < R$: $f(z) = \sum_{0}^{\infty} u_n z^n$.

Montrer que $(1 - z - z^2)\ f(z) = z$. En déduire que R est fini.

3) Calculer u_n en fonction des racines du polynôme $1 - z - z^2$. En déduire R .

Exercice 11

On appelle dérangement d'ordre n toute permutation de $[\![1\ ,\ n]\!]$ qui n'a aucun point fixe.
On note D_n le nombre de dérangements d'ordre n et on pose $D_0 = 1$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} D_n \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour $|x| < 1$.

Calculer, en utilisant un produit de Cauchy, le produit $e^x . \sum\limits_{n=0}^{\infty} D_n \dfrac{x^n}{n!}$.

En déduire, avec un autre produit de Cauchy $D_n = n!\left(\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ pour $n \geq 2$.

IV. Développement en séries entières des fonctions usuelles

Définition 1

1) Soient $\rho > 0$ et f une fonction de $]-\rho\ ,\ \rho[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que f est développable en série entière sur $]-\rho\ ,\ \rho[$ s'il existe une série entière $\sum$ $a_n x^n$ convergente sur $]-\rho\ ,\ \rho[$ telle que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in\ ]-\rho\ ,\ \rho[$.

2) On dit que f , définie sur un intervalle ouvert contenant 0 est développable en série entière en 0 (ou au voisinage de 0) s'il existe $\rho > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-\rho\ ,\ \rho[$.

<u>Exemple 1</u>

On a vu que $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}}$ pour $x \in\ ]-1\ ,\ 1[$ donc $\dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1\ ,\ 1[$ et son développement est $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

<u>Exemple 2</u>

On a obtenu à l'exemple 2 de la page 6 :

$$\boxed{\ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}} \qquad \text{pour } x \in\ ]-1\ ,\ 1[$$

donc $\ell n(1 + x)$ est développable en série entière sur $]-1\ ,\ 1[$.

Exemple 3

A partir de $(Arctg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ obtenu grâce à l'exemple 1, on obtient :

$$\boxed{Arctg\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} \qquad \text{pour } x \in]-1\,,1[$$

montrant que $Arctg\ x$ est développable en série entière sur $]-1\,,1[$.

Exemple des fractions rationnelles

D'une façon générale, toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en 0 est développable en série entière en 0 et ce développement s'obtient en décomposant la fraction en éléments simples puis en développant en série entière chaque fraction simple.

Par exemple pour $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-2)^2(2x-1)}$ on obtient pour décomposition en éléments simples $f(x) = \dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

On a ensuite $\dfrac{1}{2x-1} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ pour $|x| < 1/2$ et le développement de $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ s'obtient par dérivation à partir de $\dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{2\left(\dfrac{x}{2}-1\right)} = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$ valable pour $|x| < 2$ (terminer les calculs). Comme les rayons de convergence des deux développements sont différents, on obtient ainsi un développement en série entière de f en 0 sur l'intervalle $]-1/2\,,1/2[$ (d'après le paragraphe III).

Le théorème de dérivation vu au paragraphe II donne des conditions nécessaires pour que f soit développable en série entière.

Proposition

Si f est développable en série entière sur $]-\rho\,,\rho[$ $(\rho > 0)$ alors f est C^∞ sur $]-\rho\,,\rho[$ et le développement est unique car les coefficients de ce développement sont :

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée <u>série de Taylor de f</u> en 0 et <u>est la seule série entière</u> qui puisse réaliser le développement de f .

Attention : ces conditions ne sont pas suffisantes comme le montre le

Contre-exemple

On vérifie que f définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec en particulier $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n . La série de Taylor de f est donc la série nulle dont la somme n'est pas égale à $f(x)$ en dehors de $x = 0$.

La proposition précédente montre que la formule de Taylor avec reste intégral doit permettre de déterminer des développements en série entière.

Rappel

Si f est C^∞ sur $]-\rho , \rho[$ on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

donc en posant $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$:

Théorème

Si f est C^∞ sur $]-\rho , \rho[$ $(\rho > 0)$, f est développable en série entière sur $]-\rho , \rho[$ si et seulement si $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-\rho , \rho[$.

Corollaire

Si f est C^∞ sur $]-\rho , \rho[$ $(\rho > 0)$ et s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \quad , \quad \forall x \in]-\rho , \rho[\quad , \quad \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$$

alors f est développable en série entière sur $]-\rho , \rho[$.

Remarque : Ce corollaire donne une condition suffisante mais pas nécessaire.

Application de ce corollaire

1) La fonction e^x a toutes ses dérivées égales à e^x bornées par $e^\rho = M$ sur $]-\rho , \rho[$ donc pour tout $\rho > 0$ on a :

$$\forall x \in]-\rho , \rho[\quad , \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{, c'est-à-dire : } \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

2) La fonction $\sin x$ a pour dérivée d'ordre n : $\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ majorée, en valeur absolue, par $M = 1$. On a donc f développable en série entière sur tout intervalle $]-\rho , \rho[$ donc

sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $sin\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)}{n!}\ x^n$ et comme $sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ est nul pour $n = 2p$ et vaut $(-1)^p$ pour $n = 2p + 1$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \boxed{sin\ x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\ x^{2p+1}}$$

3) En procédant de façon analogue pour $cos\ x$ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \boxed{cos\ x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}\ x^{2p}}$$

Remarque

A partir du développement de e^x , on obtient aisément ceux de $ch\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et de $sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ par sommation de deux séries entières, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \boxed{ch\ x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad \boxed{sh\ x = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}}$$

Un dernier développement en série entière important est celui de la fonction $f_\alpha(x) = (1 + x)^\alpha$ sur $]-1\ ,\ 1[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, f_α est un polynôme qu'il suffit d'écrire suivant les puissances croissantes en utilisant la formule du binôme. Si α n'est pas entier, le développement peut être justifié soit en appliquant la formule de Taylor et montrant que son reste tend vers 0, ce qui est assez délicat, soit en appliquant la méthode dite "de l'équation différentielle". Cette dernière consiste à remarquer que :

$(1 + x)\ f\ '_\alpha(x) = \alpha\ f_\alpha(x)$

à considérer l'équation différentielle :

(1) $(1 + x)\ y\ ' = \alpha\ y$

et à :

a) démontrer que f_α est la seule solution de (1) sur $]-1\ ,\ 1[$ telle que $y(0) = 1$

b) trouver une unique série entière convergente sur $]-1,1[$ telle que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ avec } y(0)=1 \text{ et vérifiant } (1).$$

On obtient alors $a_n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ et

$$\forall x \in]-1\,,1[\quad , \quad \boxed{(1+\alpha)^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}$$

Exemples

1) Retrouver des résultats déjà obtenus pour $\dfrac{1}{1-x}$ ou $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2) Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ on peut obtenir :

$$\forall x \in]-1\,,1[\quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n} x^n$$

et en déduire, puisque $(Arcsin\ x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\forall x \in]-1\,,1[\quad , \quad Arcsin\ x = x + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1.3.5\cdots(2p-1)}{2.4.6\cdots 2p} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} .$$

Exercice 12

Développer en série entière les fonctions

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} \qquad f_2(x) = arcsin\ x$$

$$f_3(x) = e^x \cos x \qquad f_4(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

$$f_5(x) = \frac{\ell n\,(1+x)}{1+x}$$

Calculer les sommes des séries :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{sin(n\theta)}{n!} x^n \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n(3n-1)} (x-1)^n \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^n S_n x^{2n} \quad \text{où } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 13

Développer en série entière la fonction $f : x \to \dfrac{1}{2+x}$.

Montrer que, pour tout entier naturel p : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\,(n+p+1)}$.

En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\,(n+4)}$.

Exercice 14

Développer $f(x) = \dfrac{1}{2} \;\ell n\,(1 - 2x\, ch\, a + x^2)$.

Exercice 15

Développer $f(x) = arctan\ x$, puis $g(x) = arctan \dfrac{2\,(1-x)}{1+4x}$.

Exercice 16

Développer de deux façons différentes $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - x\cos^2 t}$.

En déduire la valeur de $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\ dt$.

Exercice 17 (Janvier 1999)

1) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\ (2n+1)\ X^{2n}$.

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

2) En déduire toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, développables en série entière en 0, telles que

$$f\,'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f\,''(X) + X f\,'(X) + 3f(X) = 0$$

Exercice 18

On pose $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\ dt$.

Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre et en déduire le développement en série entière de f.

Exercice 19

Soit $f(x) = (x + \sqrt{1+x^2}\ )^{1/2}$.

Montrer que f est solution d'une équation différentielle du second ordre.

En déduire le développement en série entière de f .

Exercice 20

1) Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0\ ,\ 1]$.

2) On pose $u_n = \left| \dfrac{\pi}{4} - 1 + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \right|^{1/n}$.

En utilisant la série entière de la question 1 et en encadrant u_n , déterminer la limite de u_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 21

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sin(a^n x)$ où $a \in]0\,,1[$.

1) Montrer que f est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = \dfrac{(-1)^p}{1-a^{2p+1}}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left|f^{(p)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{1-a}$.

4) Prouver que f est développable en série entière en 0 et écrire ce développement.

Exercice 22

Développer en série entière la fonction $f(x) = \int_0^{\pi/2} log(1+\ x\, sin^2\, t)\, dt$, $x \in]-1\,,1[$ et étudier la convergence de la série au voisinage de 1.

V. Une application des séries entières : l'exponentielle complexe

Nous avons obtenu le développement en série entière de e^x pour tout x réel par $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
.

La série a un rayon de convergence infini donc la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout z complexe et on définit pour tout $z \in \mathbb{C}$ la fonction exponentielle complexe par :

$$\boxed{exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

ce qui réalise un prolongement de la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.
Cette nouvelle fonction conserve la propriété fondamentale :

Théorème
Pour tous nombres complexes z et z' on a :

$$exp(z+z') = exp(z)\ .\ exp(z')$$

Ce théorème se démontre en appliquant le théorème sur le produit de séries entières (paragraphe III) à $exp(z)\ .\ exp(z')$ et en utilisant la formule du binôme de Newton.

On obtient alors facilement les propriétés suivantes :

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad \dfrac{1}{exp(z)} = exp(-z)$

(2) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad \overline{exp(z)} = exp(\overline{z})$

(3) $\forall t$ réel $\quad \overline{exp\ it} = exp(-it)$ et $|exp(it)| = 1$

(4) $\forall t$ réel $\quad exp\ it = cos\ t + i\ sin\ t$

(5) Pour tous x et y réels : $\quad exp(x + iy) = (exp\ x)(cos\ y + i\ sin\ y)$

De façon analogue, il est possible de définir $cos\ z$ et $sin\ z$ pour z complexe en utilisant les séries de rayon de convergence infini obtenues pour développement de $cos\ x$ et $sin\ x$ quand x est réel :

$$\boxed{cos\, z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!}} \quad \text{et} \quad \boxed{sin\, z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}}$$

On obtient facilement les propriétés :

(1) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad cos\ z + i\ sin\ z = exp(iz)$

et $\quad cos^2 z + sin^2 z = 1$

(2) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad cos\ z = \dfrac{exp(iz) + exp(-iz)}{2}$

et $\quad sin\ z = \dfrac{exp(iz) - exp(-iz)}{2i}$ $\quad$ (formules d'Euler)

(3) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}$ $\quad cos(z + z') = cos\ z\ cos\ z' - sin\ z\ sin\ z'$

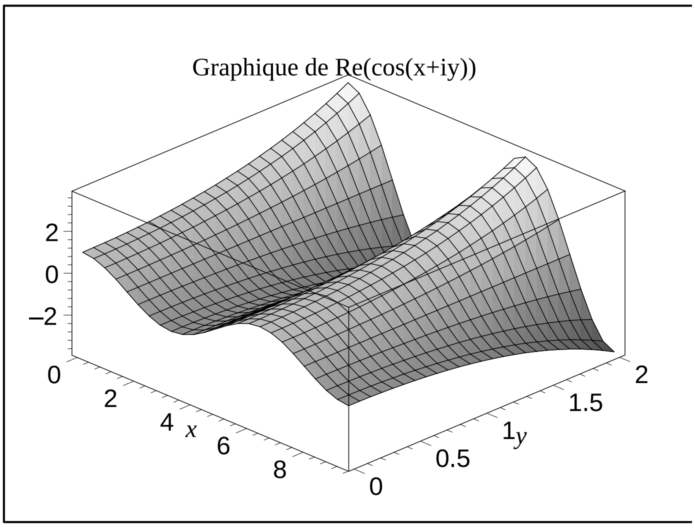
et $\quad sin(z + z') = sin\ z\ cos\ z' + cos\ z\ sin\ z'$

et les formules classiques de trigonométrie qui en découlent ($sin\ 2z$, $cos\ 2z$, $tan(z + z')$ ...). Par contre, une propriété importante a été perdue en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, $|cos\ z|$ et $|sin\ z|$ ne sont plus bornés sur $\mathbb{C}$ car, par exemple pour y réel :

$$cos(iy) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(iy)^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^{2p}}{(2p)!} = ch\ y$$

et de même $sin(iy) = i\ sh\ y$.

Voici la représentation graphique de la partie réelle de $cos(x+iy)$. On voit sur les cotés :
pour $y=0$, la représentation graphique de $cos(x)$
pour $x=0$, la représentation graphique de $ch(y)$.



Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $e^z=-1$, $e^z=1+i$, $cos\, z=-\dfrac{13}{5}$.

Exercice 24

Si $tan\, z=\dfrac{sin\, z}{cos\, z}$ calculer, pour y réel, $tan(iy)$ en fonction de $th\ y$ et en déduire pour $z=x+iy$ l'expression de $tan\, z$ en fonction de $tan\, x$ et $th\ y$.