UFR Mathématiques DEUG MIAS-MASS $2^{\text{ème}}$ année

UE 7 - MA5 - Analyse Année 2000-2001

Feuille de TD n°1

Sommes de Riemann

Exercice n°1

Calculer les limites des suites suivantes

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

2) $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{2n} + \sin\dfrac{2\pi}{2n} + \cdots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right]$

3) $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^p + \left(\dfrac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^p\right]$ où p est un entier naturel fixé.

4) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

Exercice n°2

Calculer les limites des suites suivantes

1) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)n^n}\right)^{1/n}$

2) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$

3) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$

Exercice n°3

1) Calculer la limite de la suite $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$ avec $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2) Donner un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \left(2^2 \times 3^3 \times \ldots \times n^n\right)^{4/n^2}$.

Exercice n°4

Calculer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{n+k}\right)$

Exercice n°5

Calculer la limite en $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t} dt$.

Exercice n°6*

Calculer, pour $| r | \neq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r\cos\theta + r^2)\, d\theta$.
Indication : utiliser les sommes de Riemann.

Exercice n°7*

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|.$$

On pose $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\big(\frac{i}{n}\big)$. Montrer que $|\alpha_n| \leq \dfrac{k}{2n}\cdot$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice n°8

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$ à valeurs réelles telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geq (b-a)^2.$$

Exercice n°9

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que l'on a l'inégalité suivante et étudier les cas d'égalité.

$$\int_0^1 \big(f(t)\big)^2 dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2 dt.$$

Exercice n°10*

Soient α et β deux réels.
On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$.
Déterminer $\inf\{\displaystyle\int_0^1 \big(f'(t)\big)^2 dt \mid f \in E\}$.

Intégration de fonctions à valeurs complexes

Exercice n°11

Soit n un entier naturel. On pose

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{5 + 4\cos\theta} d\theta.$$

1) Montrer que J_n est réel.

2) Trouver une relation de récurrence entre J_n, J_{n-1} et J_{n-2}.

3) Vérifier que $J_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n} \dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice n°12

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n.
Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$.

Calculs de limites

Exercice n°13

Soit n un entier naturel. On définit l'intégrale I_n par

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^n}.$$

1) Calculer la limite de I_n.

2) Donner un équivalent de $1 - I_n$ en $+\infty$.

Exercice n°14

Donner un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1 + x)\big)^n \, dx$.

Exercice n°15

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Calculer les limites des suites suivantes

1) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}dt$

2) $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n} nf(x)\,dx$

3) $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,dx$

Exercice n°16

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Calculer la limite de nu_n où $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

Calculs d'intégrales - Propriétés

Exercice n°17

Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(2nx)\,dx$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos 2x\,dx$ **3)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\sin x\,dx$

4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$ **5)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$ **6)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}dx$

7) $\displaystyle\int_0^{1/2} (\text{Arcsin}\,x)^2\,dx$ **8)** $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\ln x\,dx$ **9)** $\displaystyle\int_0^1 \text{Arctan}\,x\,dx$

Exercice n°18

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

Exercice n°19

Calculer, avec le minimum de calculs, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\,dx$.

Exercice n°20

On considère les deux intégrales I et J suivantes.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x \sin x}} dx.$$

Montrer que $I = J$ et les calculer.

Exercice n°21

Calculer $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \, dt$ avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice n°22

Calculer pour $x > 0$,

$$\int_{1/x}^{x} \left(\int_0^1 \frac{du}{t^2+u^2}\right) dt.$$

Exercice n°23*

Calculer pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{t \ln t}\cdot$ En déduire

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}\cdot$$

Exercice n°24*

Trouver toutes les fonctions f continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 \, dx = \int_0^1 \big(f(x)\big)^3 \, dx = \int_0^1 \big(f(x)\big)^4 \, dx.$$

Formule de Taylor

Exercice n°25

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair et soit n_0 un entier naturel non nul. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout entier $n \geq n_0$, pour tout réel x, on ait $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que f est un polynôme dont on précisera le degré.

$\boxed{\textbf{Exercice n°26}}$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles et qui vérifient $|f''(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour $f \in \mathcal{E}$, on pose $A(f) = f(0) - 2f(1/2) + f(1)$. Montrer que A est borné sur $\mathcal{E}$ et déterminer sa borne supérieure sur $\mathcal{E}$.
Appliquer la formule de Taylor entre 0 et 1/2, et entre 1/2 et 1.

$\boxed{\textbf{Exercice n°27}}$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout réel x, $|f(x)| \leq 1$ et $|f''(x)| \leq 1$.
Montrer que, pour tout réel x, $|f'(x)| \leq \sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{Exercice n°28}^*}$

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles et on suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) > 0$. Montrer que

$$\int_0^1 |f''(t)|\, dt \geq 4 \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\}.$$

Appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale entre 0 et c, puis entre c et 1 et choisir convenablement c.

Intégrales fonction d'une de leurs bornes

$\boxed{\textbf{Exercice n°29}}$

Montrer que la fonction $F(x) = \displaystyle\int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1+\ln^2 t}\; dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

$\boxed{\textbf{Exercice n°30}}$

Soit a un réel fixé. Déterminer les applications continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x réel :

$$\int_0^x f(t)\, dt + f(1-x) = a.$$

Exercice n°31

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x-t)\sin t\,dt$.
Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice n°32

Soient f une fonction continue de $[0,\pi]$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in [0,\pi]$, $\phi(x) = \displaystyle\int_0^\pi |\sin(x-t)|f(t)\,dt$. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et exprimer ϕ'' en fonction de ϕ et de f.

Exercice n°33

Simplifier l'expression de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\,dt.$$

Exercice n°34

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose, pour $x \neq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt.$$

Montrer que l'on peut prolonger F en 0 par continuité et que la fonction obtenue est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°35

Déterminer les fonctions g continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$g(x) = x + \int_0^x \cos(x-t)g(t)\,dt.$$

Exercice n°36*

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2\int_0^x \sqrt{f(t)}\,dt.$$

Exercice n°37

Soit $F(x) = \int_e^x \ln(\ln t)\, dt$. Montrer que l'on a $F(x) \sim x \ln(\ln x)$ en $+\infty$.

Exercice n°38

Ecrire les développements limités en 0 à l'ordre 3 des fonctions suivantes :

1) $F(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{2 - \sin^2 t}\, dt$

2) $G(x) = \int_0^x e^{\sqrt{t^2+1}}\, dt$

Exercice n°39

Etudier la fonction H définie pour $x > 0$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{-1/t}\, dt.$

Exercice n°40

Etudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt.$

Exercice n°41*

Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels x et y, on ait

$$f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt.$$

Indication : fixer un y tel que $f(y) \neq 0$ et montrer alors par récurrence que f est indéfiniment dérivable, puis terminer par une équation différentielle du second ordre linéaire.

Calcul numérique d'intégrales

Exercice n°42

Calculer à 10^{-3} près l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$

1) par la méthode des trapèzes,

2) par la méthode de Simpson.

Exercice n°43

Calculer à 10^{-3} près l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \sin x^2\, dx$.

Exercice n°44

Calculer à 10^{-3} près l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Extraits d'examens

Exercice n°45

Extrait de l'examen de mai 1995

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos(t^2)\, dt$ (on ne cherchera pas à calculer φ.)

1) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de φ'.

2) $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ a-t-elle une limite quand x tend vers 0 ?

Exercice n°46

Extrait de l'examen de mai 1995

1) On considère une fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

a) Montrer que

$$\frac{1}{2}\big(g(0)+g(1)\big) - \int_0^1 g(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (t-t^2)g''(t)\, dt.$$

On pourra intégrer $\int_0^1 (t-t^2)g''(t)\, dt$ par parties.

b) On suppose que, pour tout $t \in [0,1]$, $g''(t) \geq 0$. Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (t-t^2)g''(t)\, dt \leq \frac{1}{8}\big(g'(1)-g'(0)\big).$$

2) Soit n un entier non nul et k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$. On pose

$$\Delta_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k+1}\right) - \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{dx}{1+x}.$$

En faisant un changement de variable, déduire de la première question que

$$0 \leq \Delta_k \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(n+k)^2} - \frac{1}{(n+k+1)^2}\right).$$

En déduire que $\delta_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+k+1}\right) - \ln 2$ vérifie

$$0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{8}\frac{3}{4n^2}.$$

Exercice n°47

Extrait de l'examen de septembre 1994
Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et le polynôme

$$P_n(X) = \prod_{i=0}^{n}(X-i) = X(X-1)(X-2)\dots(X-n).$$

1) Montrer que toutes les racines du polynôme dérivé P_n' sont réelles et simples, et que la plus petite, notée λ_n, appartient à l'intervalle $]0,1[$.

2) En utilisant la décomposition en éléments simples de $\frac{P_n'}{P_n}$, montrer que

$$\frac{1}{\lambda_n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

3) Justifier que, pour tout entier $p \geq 1$, on a $\int_p^{p+1}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$ et en déduire que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1).$$

En déduire la limite de λ_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°48

Extrait de l'examen de septembre 1994
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \ln 2 \text{ si } x = 1 \\ \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t} \text{ si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

1) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

2-a) En utilisant la formule de la moyenne, calculer $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x)$.

b) La fonction f est-elle continue en $x = 0$?

3-a) En utilisant un développement limité de $\ln t$ au voisinage de $t = 1$, montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que, pour $t \in]1-\alpha, 1+\alpha[$, on ait

$$(t-1) - (t-1)^2 < \ln t < (t-1).$$

b) En déduire que $\lim_{x\to 1, x\neq 1} f(x)$ existe et calculer cette limite.

c) La fonction f est-elle continue en $x = 1$?

4) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que f est dérivable en $x = 0$ et en $x = 1$ et calculer les nombres $f'(0)$ et $f'(1)$.

5-a) Montrer que, pour $x > 1$, on a

$$\frac{x^2 - x}{2\ln x} < f(x) < \frac{x^2 - x}{\ln x}.$$

b) Que peut-on dire de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

6) Tracer le graphe de f. Ce graphe admet-il une asymptote lorsque x tend vers $+\infty$?

Exercice n°49

Extrait de l'examen de mai 1994

On pose $g(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t}$ pour $t \neq 0$.

1) Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en $t = 0$. On notera encore g ce prolongement par continuité.

On considère la fonction définie pour tout x réel par $f(x) = \int_x^{2x} g(t)\, dt$. Pour $x \neq 0$, on a donc $f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} dt$. On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

2) Montrer que f est impaire.

3) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, puis calculer $f'(0)$. Montrer que f est croissante.

4) Justifier l'encadrement, pour $x \geq 0$, :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt \leq f(x) \leq \int_x^{2x} dt.$$

En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$.
Préciser cette asymptote et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

5) Etablir l'encadrement, pour $x \geq 0$, : $x - \text{Arctan}\,\dfrac{\sqrt{2}}{4} \leq f(x) \leq x$.

Exercice n°50

Extrait de l'examen de mai 1994
Pour tout réel x strictement positif, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt$.

1) Montrer que $f(x)$ est bien définie.

2) Montrer que la fonction f, définie sur $]0, +\infty[$ est dérivable et calculer, pour $x > 0$, $f'(x)$. En déduire les variations de f.

3) En minorant très simplement $\dfrac{e^t}{t}$ sur $[x, 2x]$, montrer que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

4) Calculer, pour $x > 0$, $I = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.
En encadrant e^t sur $[x, 2x]$, montrer que f admet une limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Exercice n°51

Extrait de l'examen de novembre 1999
Soit F la fonction définie, pour tout x réel, par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}.$$

1) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

2) Comparer $F(x)$ et $F(-x)$.

3) Utiliser une majoration de $\dfrac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$ pour déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4) Montrer que $F(x) = F(\dfrac{1}{2x})$ pour tout $x \neq 0$.

5) Déterminer la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ quand x tend vers 0.