Chapitre 1

Déterminant

Le résumé de cours qui accompagne les exercices ne remplace pas le cours ! Le contenu de ce chapitre est traité dans Grifone : Algèbre linéaire aux chapitres 4 (Déterminants) et 5 (Systèmes d'équations linéaires). Pour les résultats importants du résumé de cours, on donne, quand c'est possible, une référence précise à l'énoncé correspondant de ce livre (désigné par G.).

1.1 Déterminant : définition, propriétés, méthodes de calcul

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et si i et j sont deux entiers, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, *on notera $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.*

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit son déterminant $\det(A) \in \mathbb{K}$ par récurrence sur n. Pour $n = 1$, si $A = (a)$, on pose simplement $\det(A) = a$. Supposons maintenant $n > 1$, et supposons que l'on a déjà défini le déterminant des matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors on pose la définition suivante.

Définition 1.1 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de coefficients $a_{i,j}$. On définit*

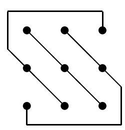
$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}\det(A_{1,1}) - a_{1,2}\det(A_{1,2}) + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1,n}\det(A_{1,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1,j}\det(A_{1,j}) \ . \end{aligned}$$

On note aussi le déterminant de A par le tableau de ses coefficients entre deux barres :

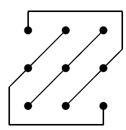
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} .$$

Pour $n = 2$ on a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Pour $n = 3$ on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$. Il y a une règle qui permet de se souvenir des signes qu'il faut mettre aux six produits de cette expression, connue sous le nom de *règle de Sarrus.*

trois produits avec + :



trois produits avec − :



Soient $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce sont des éléments de $\mathbb{K}^n$. Pour faire ressortir le rôle des colonnes, on notera aussi $\det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$

Théorème 1.2 (G., Th. IV.2 p. 132) *Le déterminant donné par la définition 1.1 possède les trois propriétés suivantes :*

1. *Si la j-ème colonne est $C_j = \lambda C'_j + \mu C''_j$ (avec C'_j et C''_j des vecteurs-colonnes dans $\mathbb{K}^n$ et λ et μ des scalaires dans $\mathbb{K}$) , alors*

$$\det(C_1, \dots, C_{j-1}, \lambda C'_j + \mu C''_j, C_{j+1}, \dots, C_n) = \\ \lambda \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C'_j, C_{j+1}, \dots, C_n) + \mu \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C''_j, C_{j+1}, \dots, C_n) \ .$$

   Autrement dit, le déterminant est linéaire en chacune des colonnes de la matrice. On dit que le déterminant est une forme multilinéaire *(ou n-*linéaire*, pour préciser) en les colonnes de la matrice.*

2. *Le déterminant est nul si deux colonnes sont égales. Une forme multilinéaire qui a cette propriété de s'annuler quand deux de ses arguments sont égaux est dite* alternée*.*
3. *Le déterminant de la matrice identité I_n vaut* 1*.*

La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur n, en utilisant la définition. Les trois propriétés du théorème caractérisent en fait le déterminant (voir 1.13).

Le fait que le déterminant est une forme multilinéaire alternée entraîne facilement les propriétés suivantes concernant le comportement du déterminant par rapport aux opérations élémentaires sur les colonnes.

Proposition 1.3 1. *Le déterminant ne change pas quand on ajoute à une colonne un multiple d'une autre colonne :*

$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j \qquad \det(\dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_j, \dots) = \det(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) \ .$$

2. *Le déterminant est multiplié par -1 quand on échange deux colonnes :*

$$C_i \leftrightarrow C_j \qquad \det(\dots, C_j, \dots, C_i, \dots) = -\det(\dots, C_i, \dots, C_j, \dots) \ .$$

   On dit que le déterminant est antisymétrique*.*

3. *Le déterminant est multiplié par λ quand on multiplie une colonne par λ.*

$$C_i \leftarrow \lambda C_i \qquad \det(\dots, \lambda C_i, \dots) = \lambda \det(\dots, C_i, \dots) \ .$$

(Il est entendu qu'il n'y a rien de changé dans les ... entre la gauche et la droite des égalités ci-dessus.)

Les mêmes règles s'appliquent aux opérations élémentaires sur les lignes. En effet les lignes de A sont les colonnes de la matrice transposée ${}^tA$ (si A est la matrice de coefficients $a_{i,j}$, ${}^tA$ est la matrice de coefficients $b_{i,j}$ avec $b_{i,j} = a_{j,i}$), et on a :

Théorème 1.4 (G. Th. IV.11, p. 144) *Soit A une matrice $n \times n$. Alors*

$$\det({}^tA) = \det(A) \ .$$

Ce théorème se démontre à partir de la formule utilisant les signatures de permutation (1.12).

A l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes, la méthode du pivot de Gauss permet de passer de n'importe quelle matrice carrée à une matrice triangulaire, et la proposition 1.3 permet de suivre les transformations du déterminant. On se ramène ainsi au déterminant d'une matrice triangulaire, dont le calcul est immédiat :

Proposition 1.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Le déterminant de A est égal au produit de ses coefficents diagonaux :*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} \ .$$

Donnons un exemple de calcul complet, en précisant à chaque fois les opérations élémentaires utilisées (pour l'exemple, ce seront des opérations sur les lignes).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \end{vmatrix} \overset{2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \end{vmatrix} \overset{3}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -9 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{4}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} \overset{5}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \overset{6}{=} -18$$

avec,

pour 1 : $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{cases}$ pour 2 : $L_2 \leftrightarrow L_3$ pour 3 : $L_2 \leftarrow \frac{-1}{2} L_2$

pour 4 : $L_4 \leftarrow L_4 + 5L_2$ pour 5 : $L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3$ pour 6 : triangulaire.

On a regroupé trois opérations élémentaires à la première étape ; ces opérations ne changent pas la ligne L_1. Mais il faut *se méfier des manipulations abusives* sur les lignes ou les colonnes. Par exemple, faire simultanément $L'_1 = L_1 + L_2$ et $L'_2 = L_2 + L_1$ ne va pas !

Une autre conséquence facile du fait que le déterminant est une forme multilinéaire alternée est la condition suffisante pour l'annulation du déterminant donnée par la proposition suivante (la version pour les lignes découle de celle sur les colonnes par transposition). On verra (Théorème 1.15) que c'est aussi une condition nécessaire.

Proposition 1.6 *Soit A une matrice carrée. Si une des colonnes (lignes) de A est combinaison linéaire des autres, alors* $\det(A) = 0$.

La formule de définition du déterminant est un développement suivant la première ligne. En utilisant l'antisymétrie par rapport aux lignes, on obtient une formule de développement suivant n'importe quelle ligne et, par transposition, suivant n'importe quelle colonne. De tels développements facilitent les calculs quand on a beaucoup de zéros sur une ligne ou une colonne.

Proposition 1.7 (G. Th. IV.15 p. 147) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de coefficients $a_{i,j}$. Alors :*

– *(Développement du déterminant suivant la i-ème ligne)*

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}) + (-1)^{i+2} a_{i,2} \det(A_{i,2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{i,n} \det(A_{i,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \,. \end{aligned}$$

– *(Développement du déterminant suivant la j-ème colonne)*

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+j} a_{1,j} \det(A_{1,j}) + (-1)^{2+j} a_{2,j} \det(A_{2,j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \det(A_{n,j}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}) \,. \end{aligned}$$

Pour se souvenir du signe $(-1)^{i+j}$, on peut penser au damier suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & & \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & & & \\ - & & & \ddots & & \\ & & & & & + \end{pmatrix} .$$

Exercice 1.1

Calculer les déterminants suivants ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} j & j \\ -1 & j \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 22 & 44 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1+i & 1-2i & 1+i \\ 1-2i & 1+i & 1+i \\ 1+i & 1+i & 1-2i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & j^2 & j \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & j & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.2

Démontrer, sans les développer, que les déterminants suivants sont nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 8040 \\ 3 & 5 & 3050 \\ 6 & 2 & 6020 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} j & j^2 & -\frac{1}{2} \\ j^2 & j & -\frac{1}{2} \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 1.3

On suppose que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} c & c-2b & a \\ f & f-2e & d \\ i & i-2h & g \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & 2a-c \\ 2g & 2h & 4g-2i \\ d & e & 2d-f \end{vmatrix}$$

Exercice 1.4

Calculer les déterminants suivants

1. en développant par rapport à une ligne ou une colonne judicieusement choisie,
2. ou en développant après avoir effectué un certains nombre d'opérations élémentaires faisant apparaître des zéros,
3. ou par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 25 & -15 & 23 & -5 \\ -15 & 10 & 19 & 5 \\ 23 & 19 & -15 & 9 \\ -5 & 5 & 9 & -5 \end{vmatrix}$$

Exercice 1.5

Sachant que 546, 273 et 169 sont divisibles par 13, montrer que $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ est divisible par 13.

Exercice 1.6

Calculer $\begin{vmatrix} x^2 & x^2+1 & x^2+x+1 \\ x^2+x+1 & x^2+1 & x^2 \\ x^2 & x^2 & x^2 \end{vmatrix}$. Pour quelles valeurs de x ce déterminant est-il nul ?

Exercice 1.7

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

Exercice 1.8

Posons $D_1 = 3$, $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, et plus généralement notons D_n le déterminant d'ordre n défini par :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_2 et D_3.
2. En développant D_n suivant la première ligne ou la première colonne, montrer que l'on a la relation de récurrence $D_n = 3\,D_{n-1} - 2\,D_{n-2}$ pour $n > 2$.
3. Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels satifaisant à la relation de récurrence $u_n = 3\,u_{n-1} - 2\,u_{n-2}$ pour $n > 2$. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
4. Considérons le polynôme $P(X) = X^2 - 3\,X + 2$. Calculer les racines x_1 et x_2 de P. Montrer que les deux suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par $v_n = x_1^n$ et $w_n = x_2^n$ appartiennent à E et forment une base de E. En déduire que toute suite (u_n) appartenant à E est de la forme $u_n = a\,x_1^n + b\,x_2^n$ où a et b sont deux réels.
5. En utilisant les valeurs de D_1 et D_2, trouver les constantes a et b permettant d'écrire $D_n = a\,x_1^n + b\,x_2^n$. En déduire le calcul de D_n.

Exercice 1.9

(Déterminant de Vandermonde.) Soit $D(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & (a_0)^2 & \dots & (a_0)^n \\ 1 & a_1 & (a_1)^2 & \dots & (a_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & (a_n)^2 & \dots & (a_n)^n \end{vmatrix}$. Montrer, par récurrence sur n, que $D(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$. Indication : on peut retirer à chaque colonne a_n fois la précédente, en commençant par la droite.

Exercice 1.10

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$.

Exercice 1.11

Soient n et m des entiers vérifiant $n \geq m \geq 2$. On note C_k^ℓ les coefficients binomiaux. Calculer

$$D(n,m) = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & C_n^{m-1} \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \dots & C_{n+1}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_{n+m-1}^1 & C_{n+m-1}^2 & \dots & C_{n+m-1}^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Indication : se souvenir de la formule $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Exercice 1.12

Soient n et k des entiers positifs. On pose $D(n,k) = \begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \dots & n^k \\ 2^k & 3^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^k & (n+1)^k & \dots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$.

1. Calculer $D(n,1)$ pour $n = 1,2,3$.
2. Démontrer que $D(n,2)$ est nul pour $n > 3$.
3. Démontrer que $D(n,k)$ est nul pour $n > k+1$.

Exercice 1.13

Calculer, par récurrence sur n, le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & -b & b & -b & \dots & (-1)^{n+1}b \\ -b & a & -b & b & \dots & (-1)^{n+2}b \\ b & -b & a & -b & & \vdots \\ -b & b & -b & a & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & -b \\ (-1)^{n+1}b & (-1)^{n+2}b & \dots & \dots & -b & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 1.14

Calculer, par récurrence sur n, le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

Exercice 1.15

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det(A)$.
2. On suppose que n est impair et que ${}^t A = -A$. Montrer que $\det(A) = 0$.

Exercice * 1.16

Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes si et seulement s'il existe $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

1.2 La formule avec les signatures de permutations

Une *permutation de l'ensemble* $\{1,\dots,n\}$ est une bijection de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ (il y en a $n!$). On code souvent une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ par le tableau avec en première ligne $1, 2, \dots, n$ et en deuxième ligne $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$. Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Le *produit* $\sigma\rho$ de deux permutations est la permutation $i \mapsto \sigma(\rho(i))$. Dans l'exemple, $\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Toute permutation σ a une permutation inverse σ^{-1}. Dans l'exemple, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.8 *Le produit de permutations munit $\mathcal{S}_n$ d'une structure de groupe (pas commutatif si $n > 2$).*

Une *transposition* est une permutation qui échange deux éléments de $\{1,\dots,n\}$, et ne bouge pas les autres. Si $1 \le i < j \le n$, on note $\tau_{i\leftrightarrow j}$ la transposition dans $\mathcal{S}_n$ qui échange i et j

Théorème 1.9 (G. Prop. IV.7 p. 139) *Toute permutation est un produit d'un nombre fini de transpositions.*

Dans l'exemple, on a $\sigma = \tau_{1\leftrightarrow 3}\, \tau_{1\leftrightarrow 5}\, \tau_{1\leftrightarrow 2}$.

On définit la signature d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ de la manière suivante. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (les e_i sont vus comme vecteurs-colonnes). La *signature de* σ est $\varepsilon(\sigma) = \det(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$. Il y a d'autres façons de définir la signature, mais ce qui compte, ce sont ses propriétés rassemblées dans le théorème suivant.

Théorème 1.10 (G. Th. IV.8 p. 140)

1. *La signature d'une permutation est égale à* 1 *où à* -1.
2. *On a $\varepsilon(\sigma) = 1$ si et seulement si σ est le produit d'un nombre pair de transpositions. On dit alors que* la permutation σ est paire.
3. *On a $\varepsilon(\sigma) = -1$ si et seulement si σ est le produit d'un nombre impair de transpositions. On dit alors que* la permutation σ est impaire.
4. $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1 \qquad \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau) \qquad \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Dans l'exemple, la permutation σ est impaire : on a $\epsilon(\sigma) = -1$.

Rappelons qu'une application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée en les colonnes si et seulement si

1. $\Phi(C_1,\dots,C_{j-1},\lambda C'_j + \mu C''_j, C_{j+1},\dots,C_n) =$
$\lambda\,\Phi(C_1,\dots,C_{j-1},C'_j,C_{j+1},\dots,C_n) + \mu\,\Phi(C_1,\dots,C_{j-1},C''_j,C_{j+1},\dots,C_n)$.
2. $\Phi(C_1,\dots,C_n) = 0$ chaque fois qu'il existe $i \neq j$ avec $C_i = C_j$.

Lemme 1.11 *Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée en les colonnes. Alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j}$, on a*

$$\Phi(A) = \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \right) \Phi(I_n) \ .$$

En appliquant le lemme à $\Phi = \det$, on obtient la formule pour le déterminant avec les signatures de permutations.

Théorème 1.12 (G. Prop. IV.10 p. 143) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j}$. Alors*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \ .$$

Le fait que $\det({}^tA) = \det(A)$ se démontre à partir de cette formule.

Corollaire 1.13 *Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée en les colonnes. Alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j}$, on a $\Phi(A) = \Phi(I_n)\det(A)$. En particulier, le déterminant est l'unique forme n-linéaire alternée en les colonnes qui vaut 1 pour la matrice identité.*

Exercice 1.17

Faire la liste des éléments de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 1.18

On pose $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$. Calculer les signatures de ces permutations.

Exercice 1.19

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $\overline{A}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A. Montrer que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Exercice 1.20

Soit $D_n(t)$ le déterminant d'ordre n dont les coefficients $a_{i,j}(t)$ sont des fonctions réelles dérivables de la variable $t \in \mathbb{R}$. On désigne par $C_i(t)$, pour $i = 1, \ldots, n$, les vecteurs colonnes de $D_n(t)$.

1. Montrer que
$$\frac{d}{dt} D_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(C_1(t), \ldots, C_{k-1}(t), \frac{d}{dt} C_k(t), C_{k+1}(t), \ldots, C_n(t) \right) .$$
2. Application : si $D_n(t) = \begin{vmatrix} 1+t & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1+t \end{vmatrix}$, calculer $\frac{d}{dt}D_n(t)$, puis $D_n(t)$. Comparer avec l'exercice 10.

Exercice 1.21

(Calcul des déterminants par blocs.) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de la forme
$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, k \\ \}\, n-k \end{array} ,$$
(colonnes : $\underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{n-k}$)

avec $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(D) = \det(A)\ \det(C)$. (On pourra montrer que, en faisant varier les colonnes de A et en laissant B et C fixes, $\det(D)$ est une forme k-linéaire alternée en les colonnes de A. Ensuite, utiliser le corollaire 1.13)

Exercice 1.22

Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right) = \det(A+B)\ \det(A-B)$.

Exercice 1.23

Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\Delta = \det \left(\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right) = \det(A+iB)\ \det(A-iB)$. En déduire $\Delta \geq 0$.

1.3 Déterminant d'un produit, déterminant d'un endomorphisme

1.3.1 Déterminant d'un produit, déterminant et inverse

Théorème 1.14 (G. Th. IV.17 p. 150) *Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*
$$\det(AB) = \det(A)\ \det(B) .$$

Ce théorème se démontre en appliquant le corollaire 1.13 à $B \mapsto \det(AB)$, qui est multilinéaire alterné en les colonnes de B.

Théorème 1.15 (G. Cor. IV.18 p. 151) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.. Alors A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *Si A est inversible,* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

1.3.2 Matrice des cofacteurs

Le *cofacteur d'indice* (i, j) d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est par définition

$$(\mathrm{cof}A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \ .$$

Avec cette définition, les formules de développement suivant les lignes et les colonnes deviennent

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \, (\mathrm{cof}A)_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \, (\mathrm{cof}A)_{i,j} \ .$$

La *matrice des cofacteurs de A*, notée $\mathrm{cof}A$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les cofacteurs $(\mathrm{cof}A)_{i,j}$. Cette matrice s'appelle aussi la *comatrice de A*.

Théorème 1.16 (G. Th. IV.21 p. 153) *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$A \, {}^t(\mathrm{cof}A) = \det(A) \, I_n \ .$$

En conséquence, si A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^t(\mathrm{cof}A) \ .$$

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$, la formule donne $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. La formule des cofacteurs n'est pas pratique pour calculer l'inverse d'une matrice plus grande. Elle est par contre utile pour la théorie.

1.3.3 Déterminant de n vecteurs dans une base, déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de n éléments de E. On définit *le déterminant des vecteurs* $(v_1, \dots, v_n)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ (que l'on note $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$) comme le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est le vecteur-colonne des coordonnées de v_j dans $\mathcal{B}$: $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_i$. On peut aussi, grâce au corollaire 1.13, caractériser $\det_{\mathcal{B}}$ comme l'unique forme n-linéaire alternée $E^n \to \mathbb{K}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = 1$.

Proposition 1.17 *Avec les notations ci-dessus, $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. *Autrement dit, $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Soit f un endomorphisme linéaire de E. Le *déterminant de l'endomorphisme* f, que l'on note $\det(f)$ est le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$

Proposition 1.18 *Le déterminant* $\det(f)$ *dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$; il ne dépend donc que de l'endomorphisme f.*

Exercice 1.24

Vérifier que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ pour

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} , \quad B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 1.25

Que vaut le produit des deux déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad ?$$

En déduire la valeur de Δ_1.

Exercice 1.26

On pose

$$A(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix} \text{ et } P(x,y,z,t) = \det(A(x,y,z,t)) .$$

1. Démontrer que $P(x,y,z,t) = \left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)^2$ (on pourra d'abord calculer le produit de matrices $A(x,y,z,t)\,{}^tA(x,y,z,t)$).
2. Etant donnés deux éléments (x,y,z,t) et (x',y',z',t') de $\mathbb{Z}^4$, démontrer qu'il existe (x'',y'',z'',t'') dans $\mathbb{Z}^4$ tel que $P(x,y,z,t)\,P(x',y',z',t') = P(x'',y'',z'',t'')$. En déduire une propriété des entiers produits de deux sommes de 4 carrés.

Exercice 1.27

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients entiers. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\det(A) = \pm 1$.

ii) A est inversible et A^{-1} est à coefficients entiers.

Exercice 1.28

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$, avec A inversible. Montrer que $\det(A + tB)$ est un polynôme de degré au plus n en t, non identiquement nul. En déduire que $A + tB$ est inversible, sauf pour au plus n valeurs de t.

Exercice 1.29

Soient A et B des matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$: il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $B = U^{-1}AU$.

1. Montrer qu'il existe des matrices P et Q dans $M_n(\mathbb{R})$ telles que $AP = PB$, $AQ = QB$ et $P + iQ$ est inversible.
2. Montrer que $\det(P + tQ)$ est un polynôme en t, non identiquement nul.
3. En déduire que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$: il existe $V \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = V^{-1}AV$.

Exercice 1.30

Vérifier si la famille de vecteurs (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans les cas suivants

1. $V_1 = (1,1,0)$, $V_2 = (0,2,3)$, $V_3 = (1,2,3)$.
2. $V_1 = (4,2,1)$, $V_2 = (2,6,-5)$, $V_3 = (1,-2,3)$.

Exercice 1.31

Vérifier si la famille de vecteurs (W_1, W_2, W_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ dans les cas suivants

1. $W_1 = (1+i, 1+i, 1-i)$, $W_2 = (i, -i, -1-i)$, $W_3 = (1-i, 1-i, 1+i)$.
2. $W_1 = (1+i, i, 1-i)$, $W_2 = (1+i, -i, 1-i)$, $W_3 = (1-i, -1-i, 1+i)$.

Exercice 1.32

Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère trois points M_1, M_2 et M_3 donnés par leurs coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3). Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est nul. Ecrire, à l'aide d'un déterminant, l'équation de la droite M_1M_2 (on suppose $M_1 \neq M_2$).

Exercice 1.33

Dans l'espace rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, écrire à l'aide d'un déterminant 3×3 l'équation du plan passant par le point de coordonnées $(0, 1, 2)$ et parallèle aux vecteurs de coordonnées $(3, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$.

Exercice 1.34

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de E tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1.4 Déterminant et rang. Systèmes linéaires

1.4.1 Déterminant et rang

Définition 1.19 *Soit A une matrice $m \times n$, et soit $k \leq \min(m, n)$. Un* déterminant $k \times k$ extrait de A *est le déterminant d'une matrice obtenue en supprimant $m - k$ lignes et $n - k$ colonnes de A. On dira que le déterminant extrait est fabriqué avec les k lignes et k colonnes restantes.*

Soit Δ un déterminant $k \times k$ extrait de A, avec $k < \min(m, n)$. Un déterminant bordant Δ *est un déterminant $(k + 1) \times (k + 1)$ extrait de A fabriqué en ajoutant une ligne et une colonne à celles avec lesquelles est fabriqué Δ.*

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, alors $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ est extrait de A (il est fabriqué avec les lignes numéro 2 et 3 et les colonnes numéro 1 et 3), et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ est un déterminant bordant Δ. Le terme de déterminant bordant n'apparait pas très justifié sur l'exemple. Mais on se ramène souvent au cas où le déterminant que l'on borde est fabriqué avec les k premières lignes et les k premières colonnes de la matrice. Dans ce cas un déterminant bordant s'obtient en ajoutant une ligne au-dessous et une colonne à droite.

Théorème 1.20 (G. Th. D p. 161) *Soit A une matrice $m \times n$ à coefficients $a_{i,j}$ dans $\mathbb{K}$. Alors :*

1. *A est de rang supérieur ou égal à r si et seulement si on peut extraire de A un déterminant $r \times r$ non nul.*
2. *A est de rang exactement r si et seulement si on peut extraire de A un déterminant $r \times r$ non nul, disons Δ, et si tous les déterminants bordant Δ sont nuls.*

Voyons un exemple d'utilisation du théorème. Déterminons, en fonction du paramètre λ, le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ \lambda + 2 & \lambda + 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ fabriqué avec les trois premières lignes et et les trois premières colonnes de A vaut 1. On sait déjà que le rang de A est au moins 3. Il est exactement égal à trois si et seulement si les deux déterminants bordant D sont nuls. Ces deux déterminants sont

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ \lambda+2 & \lambda+2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - \lambda \, .$$

Le rang de A est 3 si $\lambda = 1$, et 4 si $\lambda \neq 1$.

1.4.2 Systèmes de Cramer

On considère un système de n équations linéaires à n inconnues

$$\mathcal{S} \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array} \right. .$$

Sous forme matricielle ce système s'écrit $AX = B$ où A est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{i,j}$, X le vecteur-colonne des x_i et B le vecteur-colonne des b_i. Le système $\mathcal{S}$ est appelé *système de Cramer* quand la matrice A du système est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(A) \neq 0$ (on appelle aussi $\det(A)$ le déterminant du système $\mathcal{S}$).

Théorème 1.21 (Formules de Cramer – G. Th. V.2 p. 182) *Un système de Cramer $AX = B$ de n équations à n inconnues a une solution unique, donnée par $X = A^{-1}B$. Les composantes x_j de cette solution sont données par les formules*

$$x_j = \frac{\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)}{\det(A)} \, ,$$

où C_k désigne le k-ème vecteur colonne de A

Par exemple, le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

est de Cramer puisque son déterminant $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ vaut -3. Il a une solution unique dont la première composante est $x = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-12}{-3} = 4$. Les formules de Cramer ne sont pas une méthode pratique de résolution, surtout quand le système est un peu gros.

1.4.3 Discussion d'un système linéaire général

On considère maintenant le cas général d'un système de m équations linéaires à n inconnues (ou variables). Ici, m peut être différent de n.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Ce système peut toujours s'écrire sous forme matricielle $AX = B$, où A est la matrice $m \times n$ des $a_{i,j}$. Outre m et n, un troisième nombre joue un rôle très important dans l'étude du système : c'est son *rang* r, qui est le rang de la matrice A. On a $r \leq \min(m, n)$.

Pour un système de rang r, on peut extraire de A un déterminant non nul de taille $r \times r$. Faisons le choix d'un tel déterminant Δ. Il est fabriqué avec r colonnes de A, correspondant à r variables que l'on appelle *variables principales*, et avec r lignes de A, correspondant à des équations que l'on appelle *équations principales*. Les $n - r$ autres variables sont appelées *variables libres*. Le choix des variables et équations principales dépend du choix du déterminant non nul extrait Δ de taille $r \times r$, il peut y avoir plusieurs choix possibles. Quitte à changer l'ordre des variables et l'ordre des équations, on peut supposer que ce déterminant Δ est fabriqué avec les r premières lignes et les r premières colonnes de la matrice A.

Le système peut s'écrire $x_1C_1+\cdots+x_nC_n = B$, où $C_1,\ldots,C_n$ sont les colonnes de A. Comme le sous-espace vectoriel F engendré par $(C_1,\ldots,C_n)$ admet $(C_1,\ldots,C_r)$ pour base, le système a une solution si et seulement si la matrice de colonnes $(C_1,\ldots,C_r,B)$ est de rang r, c'est-à-dire, d'après le théorème 1.20, si et seulement si les $m-r$ déterminants $(r+1)\times(r+1)$ bordant Δ dans la matrice $(C_1,\ldots,C_r,B)$ sont nuls. Ceci donne donc $m-r$ *conditions de possibilité du système.*

Si les conditions de possibilité sont satisfaites, il existe au moins une solution. Ecrivons alors le système sous la forme

$$x_1C_1+\cdots+x_rC_r = B - x_{r+1}C_{r+1} - \cdots - x_nC_n\ .$$

Pour tous $x_{r+1},\ldots,x_n$, le terme de droite appartient à F, et donc il existe un unique r-uplet $(x_1,\ldots,x_r)$ tel que $(x_1,\ldots,x_n)$ soit solution du système. On trouve ce $(x_1,\ldots,x_r)$ en résolvant le système formé par les r premières équations principales, qui est un système de Cramer en les r variables principales $x_1,\ldots,x_r$.

En résumé de notre discussion (voir aussi G., Th. de Rouché-Fontené V.3 p. 185) :

Il y a $m-r$ conditions de possibilité du système. Si elles ne sont pas satisfaites, le système n'a pas de solution. Si elles sont satisfaites, on obtient les solutions en résolvant le système des r équations principales pour obtenir les r variables principales en fonction des $n-r$ variables libres (si $r=n$, il y a une solution unique).

Discutons selon cette méthode le sytème $\mathcal{S}$ dépendant des paramètres λ et a :

$$\mathcal{S}\quad\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & 2y & - & z & + & t & = & \lambda \\ 2x & + & y & - & z & & & = & \lambda-1 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & & & = & 2\lambda \\ (\lambda+2)x & + & (\lambda+2)y & - & z & & & = & 3\lambda+a \\ 3x & & & - & z & + & 3t & = & \lambda^2-2 \end{array}\right.$$

La matrice du système est la matrice dont nous avons étudié le rang plus haut.

Si $\lambda=1$, le rang du système $\mathcal{S}$ est 3. Dans ce cas on peut choisir pour déterminant extrait Δ non nul celui construit sur les trois premières lignes et trois premières colonnes ; les variables principales sont x, y et z, et les équations principales sont les trois premières. On a deux conditions de possibilité, qui sont

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 3+a \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

La deuxième égalité est vraie. La première est vérifiée si et seulement si $a=-1$, car le premier déterminant vaut $1+a$. Donc le système n'a pas de solution si $\lambda=1$ et $a\neq-1$, et une infinité de solutions que l'on peut écrire en fonction de t si $\lambda=1$ et $a=-1$.

Si $\lambda\neq1$, le rang du système est 4 et on peut choisir pour déterminant extrait non nul Δ le déterminant construit sur les quatre colonnes et les quatre premières lignes. Les variables principales sont toutes les variables x, y, z et t, et les équations principales sont les quatre premières. La condition de possibilité du système est

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & \lambda \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \lambda-1 \\ 5 & 4 & -2 & 0 & 2\lambda \\ \lambda+2 & \lambda+2 & -1 & 0 & 3\lambda+a \\ 3 & 0 & -1 & 3 & \lambda^2-2 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Comme ce déterminant vaut $\lambda(\lambda-1)^2$, le système n'a pas de solution si $\lambda\neq1$ et $\lambda\neq0$, et il a une solution unique si $\lambda=0$.

Exercice 1.35

Déterminer le rang des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ a & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 1.36

Quel est le rang des matrices suivantes :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(avec A_n de taille $n \times n$).

Exercice 1.37

Soient $V_1 = (1, -2, 0, 3, 4)$, $V_2 = (3, 2, 8, 1, 4)$, $V_3 = (2, 3, 7, 2, 3)$, $V_4 = (-1, 2, 0, 4, -3)$ et $V_5 = (0, 1, 1, 3, -2)$. La famille $(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^5$? Sinon, en extraire une famille libre engendrant le même sous-espace.

Exercice 1.38

Résoudre par la méthode de Cramer les systèmes suivants :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & - & y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & 2z & = & 6 \end{array} \right. \qquad (S_2) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda x & + & y & + & z & = & \lambda \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda + 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 3 \end{array} \right. .$$

Comparer cette méthode avec la méthode du pivot.

Exercice 1.39

On considère le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & (m+1)\,y & & & + & 2m\,t & = & a \\ m\,x & & & + & z & + & t & = & b \\ (2m+1)\,x & + & y & + & (m+1)\,z & + & t & = & c \\ & & & & (m+1)\,z & + & (m+1)\,t & = & d \end{array} \right. ,$$

où a, b, c, d, m sont des paramètres réels.

1. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le système admet une solution unique.
2. Dans les autres cas, donner les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour que le système admette des solutions et déterminer ces solutions.

Exercice 1.40

En se servant de l'exercice 9, discuter et résoudre suivant les valeurs des paramètres a, b, c, d le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ a\,x & + & b\,y & + & c\,z & + & d\,t & = & e \\ a^2\,x & + & b^2\,y & + & c^2\,z & + & d^2\,t & = & e^2 \\ a^3\,x & + & b^3\,y & + & c^3\,z & + & d^3\,t & = & e^3 \end{array} \right. .$$

Exercice 1.41

On considère le système de n équations à n inconnues donné par

$$x_1 + \cdots + x_{i-1} + \lambda\, x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = a_i \ , \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n,$$

où $\lambda, a_1, \ldots, a_n$ sont des paramètres.

1. Etudier le système en utilisant l'inconnue auxiliaire $s = x_1 + \cdots + x_n$.
2. Etudier le système en utilisant les déterminants.
3. Etudier le systeme lorsque $a_i = \lambda^i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Exercice 1.42

Soient $A_1, \ldots, A_n$ n points du plan. Combien y a-t-il de polygones à n côtés admettant ces points comme milieux de leurs côtés ? (On pourra se servir de l'exercice 36.)

Exercice 1.43

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} d\,x & + & a\,y & + & b\,z & + & c\,t & = & \alpha \\ a\,x & + & d\,y & + & c\,z & + & b\,t & = & \beta \\ b\,x & + & c\,y & + & d\,z & + & a\,t & = & \gamma \\ c\,x & + & b\,y & + & a\,z & + & d\,t & = & \delta \end{array} \right.$

admette une unique solution ?

Exercice 1.44

Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère trois droites D_1, D_2 et D_3 données par leurs équations $a_i\, x + b_i\, y = c_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer que si les droites D_1, D_2 et D_3 sont concourantes, le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ est nul. La réciproque est-elle vraie ?