Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques
L3 Mathématiques 2009-2010

ALBI – Feuille d'exercices sur les espaces hermitiens

Exercice 1

On définit, pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$

$$q(x) = |x_1|^2 + 3\,|x_2|^2 + 6\,|x_3|^2 + i\,\overline{x_1}\,x_2 - i\,x_1\,\overline{x_2} + 2i\,x_2\,\overline{x_3} - 2i\,\overline{x_2}\,x_3\ .$$

1. Vérifier qu'il existe une forme hermitienne f sur $\mathbb{C}^3$ telle que $q(x) = f(x,x)$, et écrire la matrice de f dans la base canonique.
2. Montrer que f est un produit scalaire hermitien. (On pourra décomposer q en carrés de modules en s'inspirant de l'algorithme de Gauss).
3. Construire une base orthogonale de $\mathbb{C}^3$ pour ce produit scalaire hermitien.

Exercice 2

On est dans $\mathbb{C}^3$ avec sa structure hermitienne standard. Soit F le plan d'équation $x_1 - x_2 + ix_3$. Déterminer l'orthogonal $F^{\perp}$. Calculer la matrice de la projection orthogonale sur F. Trouver une base orthogonale de F.

Exercice 3

Soit $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Vérifier que $(P \mid Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{it})}\,Q(e^{it})\,dt$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Est-ce que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire ?
3. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ telle que $\varphi_1(a) = \ldots = \varphi_n(a) = 0$, et donner un $\varphi_0 \in \mathbb{C}_n[X]$ qui peut être complété en une telle base. (On pourra considérer le sous-espace F des $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que $P(a) = 0$.)
4. Trouver la borne supérieure des $|P(a)|$ pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ avec $\|P\| = 1$.

Exercice 4

Est-ce que les matrices hermitiennes forment un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Montrer qu'elles forment un sous-espace vectoriel réel, et calculer la dimension (sur $\mathbb{R}$) de ce sous-espace.

Exercice 5

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices hermitiennes (H, L) tel que $M = H + iL$. Montrer que M est normale ($M^*\,M = M\,M^*$) si et seulement si $H\,L = L\,H$.

Exercice 6

Soit U une matrice unitaire de taille 2 telle que $\det(U) = 1$. Montrer qu'il existe des nombres complexes α et β avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ tels que $U = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice unitaire $U \in U_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telle que $D = U^{-1}\,A\,U$.

Exercice 8

Soient $c_0, \ldots, c_{n-1}$ des nombres complexes. On pose

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ldots & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\zeta = e^{2i\pi/n}$.

1. Montrer que, si k est un entier, le vecteur $(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \ldots, \zeta^{(n-1)k})$ est un vecteur propre de C. Quelle est la valeur propre associée ?
2. Montrer que, si n ne divise pas k, alors $1 + \zeta^k + \zeta^{2k} + \cdots + \zeta^{(n-1)k} = 0$.
3. En déduire que C possède une base orthogonale de vecteurs propres (pour la structure hermitienne usuelle de $\mathbb{C}^n$).
4. Est-ce que C est normale ?