Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques
L3 Mathématiques 2009-2010 – ALBI

ALBI – Feuille d'exercices sur la dualité

Exercice 1

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \mapsto f'(a)$ est une forme linéaire sur E.

Soit F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, et soit $g \in F$. Montrer que $f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ est une forme linéaire sur E.

Exercice 2

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des matrices $n \times n$). Montrer que $\varphi_A : M \mapsto \mathrm{trace}(AM)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A \mapsto \varphi_A$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans son dual $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$.
3. Soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 0, sauf celui sur la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1. Calculer $\mathrm{trace}(AE_{i,j})$ en fonction des coeffcients de A. Quel est le noyau de $A \mapsto \varphi_A$?
4. Montrer que pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\ell(M) = \mathrm{trace}(AM)$.

Exercice 3

Calculez la base duale de la base $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

On se donne les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} \ell_1(x_1,x_2,x_3) & = & x_1 + 2x_2 + x_3, \\ \ell_2(x_1 n x_2, x_3) & = & x_1 - x_2, \\ \ell_3(x_1,x_2,x_3) & = & x_2 + 2x_3. \end{array}$$

Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, et trouver la base duale de $\mathbb{R}^3$

Exercice 5

Calculez une base de l'orthogonal dans $(\mathbb{R}^3)^*$ du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $f_1 = (3,2,1)$, $f_2 = (1,3,5)$ et $f_3 = (1,1,1)$.

Exercice 6

Donner la dimension et une base des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$ et de leur orthogonal dans $(\mathbb{R}^3)^*$:

1. $F_1 = \{(x,y,z) \mid x = 0\}$;
2. $F_2 = \{(x,y,z) \mid x - 3y + 2z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0 \text{ et } x - 8y + 5z = 0\}$;
3. $F_3 = \mathrm{Vect}((1,2,3),(4,5,6))$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$

On considère dans $\mathbb{R}^4$ le sous-espace

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Donner une base de l'orthogonal $F^\circ \subset (\mathbb{R}^4)^*$.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$

Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Montrez que l'on a $(F_1+F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ$. A-t-on la même propriété si F_1 et F_2 sont des sous-espaces de E^*, en prenant les orthogonaux dans E ?

On suppose maintenant E de dimension finie. Montrez que $(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$

Soit D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations

$$\begin{cases} 2x + 3y - z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \end{cases} .$$

Donner une équation du plan vectoriel contenant D et le vecteur$(1, 1, 1)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$

Soient $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ des formes linéaires sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes si et seulement si l'application linéaire $f = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p) : E \to \mathbb{K}^p$ est surjective. On suppose en plus que E est de dimension p. Montrer que f est injective si et seulement si $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p)$ est une base de E^*

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2. Si $a \in \mathbb{R}$, on note φ_a la forme linéaire sur E définie par $\varphi_a(P) = P(a)$.

1. Montrer que $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$ est une base de E^*.
2. En déduire qu'il existe des constantes réelles α, β, γ telles que, pour tout $P \in E$, on ait (formule des trois niveaux) :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\, dt = \alpha P(-1) + \beta P(0) + \gamma P(1) .$$

3. Quelle est la base de E duale de $(\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$? (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
4. Calculer les constantes α, β, γ.
5. Est-ce que la formule des trois niveaux est encore valable pour un polynôme de degré 3 ?

Exercice 12

Soit $E = \mathbb{C}_k[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq k$. On pose $P_0 = 1$ et $P_k = \dfrac{1}{k!}\, X\,(X-k)^{k-1}$ pour $k \geq 1$. On définit aussi pour $k \in \mathbb{N}$ la forme linéaire $\varphi_k : E \to \mathbb{C}$ par $\varphi_k(P) = P^{(k)}(k)$ (où $P^{(k)}$ est la dérivée k-ème).

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.
2. Montrer que $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ sont des bases duales.
3. Démontrer l'identité

$$(x+y)^n = y^n + x \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (x-k)^{k-1}(y+k)^{n-k} \,.$$

Exercice 13

Cet exercice a pour but de montrer que l'hypothèse de dimension finie est vraiment nécessaire pour certains énoncés vus en cours. Pour i entier naturel, soit $\ell_i : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ la forme linéaire qui envoie un polynôme P sur le coefficient de X^i dans P (donc $\ell_i(P)$ est la coordonnée de P suivant X^i dans la base $(1, X, X^2, \ldots)$ de $\mathbb{K}[X]$). Soit $F = \mathrm{Vect}(\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ldots) \subset (\mathbb{K}[X])^*$. Montrer que $F^\circ = \{0\}$. Soit $m : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $m(P) = P(1)$; est-ce que m appartient à F ? Chercher des énoncés du cours dont cet exemple montre qu'ils ne sont pas satisfaits en dimension infinie.

Problème

Soit E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire et $m : F \to \mathbb{K}$ une forme linéaire sur F, on pose ${}^t\varphi(m) = m \circ \varphi : E \to \mathbb{K}$.

1. Vérifiez que ${}^t\varphi(m)$ est une forme linéaire sur E. Vérifiez que ${}^t\varphi : F^* \to E^*$ est une application linéaire (cette application linéaire s'appelle la **transposée de** φ).
2. Vérifiez que l'on a, pour tout x de E et tout m de F^*, $\langle m, \varphi(x)\rangle = \langle {}^t\varphi(m), x\rangle$ (le terme de gauche est un crochet de dualité pour F, et celui de droite pour E).
3. Montrez les propriétés suivantes de la transposition (φ et ψ sont des applications linéaires de E dans F, λ un scalaire) : ${}^t(\varphi + \psi) = {}^t\varphi + {}^t\psi$; ${}^t(\lambda\,\varphi) = \lambda\,{}^t\varphi$.
4. Montrez que $\ker({}^t\varphi) = \varphi(E)^\circ$.

On suppose pour la fin du problème E et F de dimensions finies, ce qui permet d'identifier E à son bidual E^{**} et F à F^{**}.

5. Montrez que, pour toute application linéaire $\varphi : E \to F$, ${}^t({}^t\varphi) = \varphi$.
6. Montrez que φ et ${}^t\varphi$ ont même rang.
7. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Montrez que, si M est la matrice de l'application linéaire $\varphi : E \to F$ dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, alors la matrice de la transposée ${}^t\varphi : F^* \to E^*$ dans les bases duales $\mathcal{F}^*$ et $\mathcal{E}^*$ est la transposée de M.