Université de Rennes 1 - UFR Mathématiques
L3 Mathématiques 2009-2010 – ALBI

Feuille d'exercices sur les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques

Exercice 1

Soit b la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Quel est le noyau de b, le rang de b ?
Trouvez une base de l'orthogonal pour b de

$$F = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \text{de} \quad G = \mathrm{Vec}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comparer avec les résultats du cours sur la dimension de l'orthogonal.

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels. Calculer la matrice dans la base $(1, X, X^2)$ de la forme bilinéaire symétrique

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)\, Q(t)\, dt\ .$$

Est-ce que cette forme bilinéaire symétrique est dégénérée ? Quel est son noyau ?

Mêmes questions pour la forme bilinéaire symétrique

$$(P, Q) \longmapsto P(0)\, Q(0) + P(1)\, Q(1)\ .$$

Exercice 3

Quelle est la matrice de la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto y^2 - 2xz$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? Quelle est sa matrice dans la base $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 1)$?

Exercice 4

Soit q une forme quadratique sur l'espace vectoriel E. Pour x, y dans E, quelle relation y a-t-il entre $q(x+y) + q(x-y)$ et $q(x) + q(y)$?

Exercice 5

Décomposez en carrés la forme quadratique $(x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$ sur $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa signature ? Trouver une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ pour cette forme quadratique.

Exercice 6

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3\ .$$

Déterminer le noyau de q. Montrer que l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(x) = 0$ est la réunion de deux plans vectoriels dont on donnera des équations. Calculer l'orthogonal du vecteur $(1, 1, 1)$ pour q. Quelle est la signature de q ?

Exercice 7

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tP\,A\,P$ (on ne demande pas d'expliciter P).

Exercice 8

Pour tout nombre réel a, soit q_a la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 .$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique q_a est-elle non dégénérée ?
2. Montrer qu'il existe une même base de $\mathbb{R}^3$ qui est orthogonale pour tous les q_a.
3. Soit D la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2, 2, 1)$. Trouver une base de l'orthogonal $D^\perp$ de D pour q_0. Est-ce que D et $D^\perp$ sont supplémentaires ?
4. Montrer que la forme quadratique q_a est définie positive si et seulement si $a > 2$.

Exercice 9

Soit P un plan vectoriel, q une forme quadratique non dégénérée sur P. On suppose qu'il existe un vecteur $u \neq 0$ dans P tel que $q(u) = 0$. Montrer que l'on peut compléter en une base (u, v) de P telle que la matrice de q dans cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire l'ensemble des vecteurs x de P tels que $q(x) = 0$.

Exercice 10

Quelle est la signature des formes bilinéaires symétriques de l'exercice 2 ?

Exercice 11

Montrez que l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \longmapsto & \mathrm{trace}(AB) \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous espace des matrices symétriques. Montrez que la restriction de φ à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive Quel est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour φ ? Quelle est la signature de φ ?

Problème

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - x_3x_4 .$$

Soit H un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

1. Quelle est la matrice de la forme quadratique q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$?
2. Quel est le rang et la signature de q ?
3. Quelle est la dimension de l'orthogonal de H pour q ? En donner une base.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour que la restriction $q|_H$ de la forme quadratique q à l'hyperplan H soit dégénérée. Quel est dans ce cas le rang de $q|_H$?