Chapitre 3

Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens

3.1 Produit scalaire, norme euclidienne

Définition 3.1 *Soit E un espace vectoriel réel. Un* **produit scalaire** *sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E \times E$. Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé* **espace euclidien**.
Si $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ est un produit scalaire sur E, la **norme euclidienne** *d'un élément $x \in E$ est $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.*

Un espace vectoriel réel de dimension infinie muni d'un produit scalaire est couramment appelé espace préhilbertien réel. On notera en général $(x \mid y)$ le produit scalaire.

Exemples de produit scalaire :

1. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$; si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ On a bien $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ quand $x \neq 0$.
2. La forme bilinéaire symétrique $(A, B) \mapsto \mathrm{trace}(A\,{}^t B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, si $A = (a_{i,j})$ n'est pas la matrice nulle, on a $\mathrm{trace}(A\,{}^t A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$.
3. Soit E l'espace vectoriel réel (de dimension infinie) des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose, pour f et g éléments de E,
$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \, .$$

Ceci définit bien un produit scalaire car si f n'est pas identiquement nulle, on a $\int_0^1 f(t)^2\,dt > 0$.

La norme euclidienne associée à un produit scalaire vérifie $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout réel λ. Voici d'autres propriétés.

Proposition 3.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors pour tous x et y de E on a*

$$|(x \mid y)| \leq \|x\|\,\|y\| \,.$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 3.3 (Inégalité triangulaire) *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors pour tous x et y de E on a*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $y = 0$ ou s'il existe un réel $t \geq 0$ tel que $x = t\,y$.

3.2 Orthogonalité, base orthonormale

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Dans un espace euclidien E on a donc $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ pour tout sous-espace E. Mais on a mieux :

Proposition 3.4 *Soit E un espace euclidien, F un sous-espace de E. L'orthogonal $F^\perp$ de F pour le produit scalaire est un supplémentaire de F dans E. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F dans E.*

On reprend la définition de base orthogonale déjà vue pour une forme bilinéaire symétrique et on la complète.

Définition 3.5 *Soit E un espace euclidien de dimension n. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite* **orthogonale** *quand $(e_i \mid e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. Elle est dite* **orthonormale** *si en plus $\|e_i\| = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

La base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormale si et seulement si la matrice du produit scalaire dans cette base est la matrice identité I_n, ou encore si et seulement si le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ est donné par $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Un espace euclidien possède toujours une base orthogonale (c'est vrai pour n'importe quelle forme bilinéaire symétrique, en particulier pour le produit scalaire). Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthogonale de l'espace euclidien E, on peut en faire une base orthonormale en remplaçant e_i par $\dfrac{1}{\|e_i\|} e_i$. On obtient donc :

Proposition 3.6 *Tout espace euclidien admet une base orthonormale.*

Grâce à cette proposition, on voit comment l'étude d'un espace euclidien de dimension n se ramène à celle de $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel.

On a une façon utile de fabriquer une base orthogonale (ou orthonormale) à partir d'une base quelconque d'un espace euclidien.

Proposition 3.7 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque d'un espace euclidien E. Alors on peut fabriquer par récurrence une base orthogonale $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E de la forme*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_1 & = & e_1 \\ \varepsilon_2 & = & e_2 - \lambda_{1,2}\varepsilon_1 \\ & \vdots & \\ \varepsilon_i & = & e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{j,i}\varepsilon_j \\ & \vdots & \\ \varepsilon_n & = & e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j,n}\varepsilon_j \end{array}$$

en prenant $\lambda_{j,i} = \dfrac{(\varepsilon_j \mid e_i)}{\|\varepsilon_j\|^2}$. On a $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Proposition 3.8 *Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, et soit F un sous-espace de dimension finie de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $p_F(x) \in F$ tel que $x - p(x)$ est orthogonal à F. L'application*

$$\begin{array}{rcl} p_F : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & p_F(x) \end{array}$$

est un endomorphisme linéaire. Cet endomorphisme p_F s'appelle la ***projection orthogonale sur*** *F.*

Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthogonale de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(e_i \mid x)}{\|e_i\|^2}\, e_i\ .$$

3.3 Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans toute cette section, E est un espace euclidien, $(\cdot \mid \cdot)$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ sa norme euclidienne.

Proposition 3.9 *Soit f un endomorphisme de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $f^*(x) \in E$ tel que, pour tout y de E, on a*

$$(f^*(x) \mid y) = (x \mid f(y))\ .$$

L'application $f^* : E \to E$ est un endomorphisme linéaire Cet endomorphisme f^* s'appelle **l'adjoint de** *f. Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de E, la matrice de f^* dans la base $\mathcal{E}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.*

Définition 3.10 *Un endomorphisme d'un espace euclidien est dit* **symétrique** *(ou* **autoadjoint***) s'il est égal à son adjoint.*

Si $\mathcal{E}$ est une base orthonormale de l'espace euclidien E, un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est symétrique.

Exemple : une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Proposition 3.11 *Soit f un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tous x, y de E, on a $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.*
2. *Pour tout x de E, on a $\|f(x)\| = \|x\|$.*
3. *$f^*\, f = \mathrm{Id}_E$.*

Un **endomorphisme orthogonal** *de E est un endomorphisme qui vérifie ces propriétés. Les endomorphismes orthogonaux forment un groupe, appelé le groupe orthogonal de E.*

Exemple : les symétries orthogonales.

Définition 3.12 *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tM\, M = I_n$. Les matrices orthogonales forment un sous-groupe du groupe linéaire, appelé groupe orthogonal et noté $O(n, \mathbb{R})$.*

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Alors un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E, et si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{E}$ est orthogonale.

Proposition 3.13 *Les endomorphismes orthogonaux (les matrices orthogonales) ont un déterminant égal à* 1 *ou* -1*. Ceux (celles) de déterminant* 1 *forment un sous-groupe du groupe orthogonal appelé groupe spécial orthogonal. Dans le cas des matrices, on le note* $SO(n, \mathbb{R})$

Etude des groupes orthogonaux en dimension 2 et 3.

Proposition 3.14 *Soit* E *un plan euclidien.*

1. *Soit* (e_1, e_2) *une base orthonormale de* E*, et* f *un endomorphisme orthogonal de* E *de déterminant* 1*. Alors il existe un réel* θ *tel que la matrice de* f *soit* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *(rotation d'angle* θ*).*
2. *Soit* f *un endomorphisme orthogonal de* E *de déterminant* -1*. Alors il existe une base orthonormale* (e_1, e_2) *de* E *telle que la matrice de* f *dans cette base soit* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *(symétrie orthogonale par rapport à une droite).*

Proposition 3.15 *Soit* E *un espace euclidien de dimension 3,* f *un endomorphisme orthogonal de* E*. Alors il existe une base orthonormale* (e_1, e_2, e_3) *de* E *telle que la matrice de* f *dans cette base soit* $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$*, où* θ *est un nombre réel et* $\varepsilon = 1$ *(resp.* -1*) si* $\det f = 1$ *(resp.* -1*). Dans le cas* $\det f = 1$*,* f *est l'identité ou la rotation d'axe la droite engendrée par* e_1 *et d'angle géométrique* θ*. Dans le cas* $\det f = -1$*, c'est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, ou une telle symetrie suivie d'une rotation d'axe perpendiculaire au plan*

Dans le cas d'une rotation f (déterminant 1, différente de l'identité), l'axe est la droite vectorielle propre de f associée à la valeur propre 1, et l'angle géométrique θ de la rotation est déterminé par $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{trace}(f)$.

3.4 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Théorème 3.16 *Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E. Alors il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.*

Démonstration: On admet le lemme qui dit qu'un endomorphisme symétrique a ses valeurs propres réelles (ce lemme sera démontré au prochain chapitre).

On raisonne alors par récurrence sur la dimension n de l'espace euclidien E. Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons alors $n > 1$ et le résultat établi pour un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $n - 1$. Soit λ une valeur propre réelle de f, et $u_n \in E$ un vecteur propre de valeur propre associée λ. On peut supposer u_n de norme 1, quitte à le diviser par sa norme. L'hyperplan $u_n^\perp$ orthogonal de u_n est stable par f. En effet, si x appartient à $u_n^\perp$, alors

$$(f(x) \mid u_n) = (x \mid f(u_n)) = (x \mid \lambda\, u_n) = \lambda(x \mid u_n) = 0\ ,$$

et donc $f(x)$ appartient aussi à $u_n^\perp$.

On peut donc considérer la restriction $f|_{u_n^\perp} : u_n^\perp \to u_n^\perp$. Le produit scalaire sur E induit une structure d'espace euclidien sur $u_n^\perp$, pour laquelle $f|_{u_n^\perp}$ est un endomorphisme symétrique. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormale $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ de $u_n^\perp$ formée de vecteurs propres de $f|_{u_n^\perp}$. Alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f. □

En termes de matrices, le théorème se traduit ainsi :

Théorème 3.17 *Soit M une matrice symétrique réelle de taille n. Alors il existe une matrice orthogonale U telle que ${}^tU\, M\, U = U^{-1}\, M\, U$ soit diagonale.*

On peut tirer quelques conséquences de ce théorème.

Si M est une matrice symétrique. Il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale U telle que $D = {}^tU\, M\, U = U^{-1}\, M\, U$. La matrice D est congruente à M, et donc D et M ont même signature. La signature de D est le couple formé de son nombre de coefficients diagonaux strictement positifs et de son nombre de coefficients diagonaux strictement négatifs. Or les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de M. Par conséquent :

Corollaire 3.18 *Soit M une matrice symétrique. La signature de M est égale au couple formé du nombre de ses valeurs propres strictement positives* *et du nombre de ses valeurs propres strictement négatives (valeurs propres comptées avec multiplicité).*

Exemple : Considérons la matrice symétrique de taille $n > 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Clairement $M + I_n$ est de rang 1, donc -1 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. Comme la trace de M est nulle, -1 est valeur propre de multiplicité exactement $n-1$ et l'autre valeur propre de M est $n-1$. Donc la signature de M est $((1, n-1)$.

Corollaire 3.19 *Soit E un espace euclidien et q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormale de E qui est aussi orthogonale pour q.*

Démonstration: Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormale de E et M la matrice de q dans la base $\mathcal{E}$. Il existe une matrice orthogonale U telle que $D = {}^tU\,M\,U$ soit diagonale. La matrice U est la matrice de passage à une nouvelle base orthonormale $\mathcal{E}'$ de E. La matrice de q dans la base $\mathcal{E}'$ est D, et donc cette base est aussi orthogonale pour q. $\square$