Corrigé du contrôle continu n°4

Quel est le coefficient de X^{2008} dans le développement en série formelle de la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{(X^2-1)(X^2+X+1)} \ ?$$

Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{R}$. La partie entière est nulle et la décomposition a la forme

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \ .$$

Pour trouver a on multiplie F par $X-1$ et on fait $X=1$. Ceci donne : $a = \frac{1}{6}$.
Pour trouver b on multiplie F par $X+1$ et on fait $X=-1$. Ceci donne $b = \frac{-1}{2}$.
Pour trouver c et d on multiplie F par X^2+X+1 et on fait $X=j$. Ceci donne

$$c\,j + d = \frac{1}{j^2-1} = \frac{j-1}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{1}{3}\,(j-1) \ ,$$

ce qui donne $c = \frac{1}{3}$ et $d = \frac{-1}{3}$. On obtient donc

$$F = \frac{1}{6\,(X-1)} + \frac{-1}{2\,(X+1)} + \frac{X-1}{3\,(X^2+X+1)} = -\frac{1}{6\,(1-X)} - \frac{1}{2\,(1+X)} - \frac{1-2\,X+X^2}{3\,(1-X^3)} \ .$$

On peut vérifier en faisant $X=0$ (on trouve bien -1 des deux côtés), puis en multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini (on trouve 0 des deux côtés).

On sait que le développement en série formelle de $\frac{1}{1-X}$ est $\sum_{n\geq 0} X^n$ et que celui de $\frac{1}{1+X}$ est $\sum_{n\geq 0}(-1)^n X^n$. Celui de $\frac{1}{1-X^3}$ est $\sum_{k\geq 0} X^{3k}$. Donc le développement en série formelle de $\frac{1-2\,X+X^2}{1-X^3}$ est $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ avec $a_{3k}=1$, $a_{3k+1}=-2$ et $a_{3k+2}=1$. Le coefficient de X^{2008} dans le développement en série formelle de F est donc

$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 0 \ .$$