Corrigé du contrôle continu n°3

Exercice 1. *Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle*

$$F = \frac{2\,X^4 - 5\,X^3 + 7\,X^2 - X + 1}{(X-1)^3(X^2+1)}$$

La décomposition sur $\mathbb{R}$ sera du type

$$F = E + \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{dX+e}{X^2+1}\ ,$$

avec a, b, c, d, e réels. La partie entière E vaut 0. Pour trouver la partie polaire relative au pole 1, on fait le changement de variables $X = 1 + Y$ dans le numérateur, ce qui donne

$$2\,(1+Y)^4 - 5\,(1+Y)^3 + 7(1+Y)^2 - (1+Y) + 1 = 4 + 6\,Y + 4\,Y^2 + Y^3 \times (\ldots)\ ,$$

et dans X^2+1, ce qui donne $2+2Y+Y^2$. On fait ensuite la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 :

$$4 + 6\,Y + 4\,Y^2 + Y^3 \times (\ldots) = (2 + 2\,Y + Y^2)\,(2+Y) + Y^3 \times (\ldots)\ .$$

Donc $a = 2$, $b = 1$ et $c = 0$. Enfin on multiplie F par X^2+1 et on fait $X = i$ pour trouver

$$di + e = \frac{2\,i^4 - 5\,i^3 + 7\,i^2 - i + 1}{(i-1)^3} = \frac{4}{(i-1)^2} = 2i\ ,$$

d'où $d = 2$ et $f = 0$. Pour obtenir la décomposition sur $\mathbb{C}$, il suffit de décomposer

$$\frac{2X}{X^2+1} = \frac{2X}{(X-i)(X+i)} = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}\ .$$

En conclusion, les deux décompositions sont

$$F = \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2X}{X^2+1} = \frac{2}{(X-1)^3} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}\ .$$

Exercice 2. *Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{R}(X)$ qui n'ont aucun pôle réel.*

1. *Montrez que $\mathcal{D}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}(X)$.*

   Les éléments de $\mathcal{D}$ sont les fractions qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{P}{Q}$ avec Q sans racine réelle. La somme et le produit de deux telles fractions sont encore dans $\mathcal{D}$. Les constantes (dont 0 et 1) sont dans $\mathcal{D}$, et le produit d'un élément de $\mathcal{D}$ par une constante réelle est encore dans $\mathcal{D}$.

2. *Donnez un élément inversible de $\mathcal{D}$ qui n'est pas une constante.*

   Le polynôme non constant X^2+1 est un élément de $\mathcal{D}$ et son inverse $\dfrac{1}{X^2+1}$ est aussi dans $\mathcal{D}$. Donc X^2+1 est un élément inversible de $\mathcal{D}$.

3. *Est-ce que $\mathcal{D}$ est un corps ?*

   Non. Le polynôme X est un élément non nul de $\mathcal{D}$, mais il n'est pas inversible dans $\mathcal{D}$ car $\dfrac{1}{X}$ a un pole réel, à savoir 0.