Contrôle Continu n°2 – Corrigé

Soit $P = X^6 + X^5 + 3\,X^4 + 2\,X^3 + 3\,X^2 + X + 1$.

1. *Quelle est la multiplicité de i ($i^2 = -1$) comme racine de P ?*
   On a $P(i) = i^6 + i^5 + 3\,i^4 + 2\,i^3 + 3\,i^2 + i + 1 = -1 + i + 3 - 2\,i - 3 + i + 1 = 0$.
   On a $P' = 6\,X^5 + 5\,X^4 + 12\,X^3 + 6\,X^2 + 6\,X + 1$ et $P'(i) = -6\,i + 5 - 12\,i - 6 + 6\,i + 1 = 0$.
   On a $P'' = 30\,X^4 + 20\,X^3 + 36\,X^2 + 12\,X + 6$ et $P''(i) = 30 - 20\,i - 36 + 12\,i + 6 = -8\,i \neq 0$.
   Donc i est racine de P de multiplicité 2.
2. *Trouver toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$, avec leurs ordres de multiplicité.*
   Puisque P est à coefficients réels et que i est racine de P de multiplicité 2, son conjugué $-i$ est aussi racine de P de multiplicité 2. On a déjà 4 des racines de P dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité. Appelons α et β les deux autres racines (P est de degré 6, donc il a 6 racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{C}$). Puisque P est unitaire, la somme des racines est l'opposé du coefficient de X^5 dans P. On a donc $i + i + (-i) + (-i) + \alpha + \beta = -1$, d'où $\alpha + \beta = -1$. Comme P est en plus de degré pair, le produit des racines est le terme constant, donc $i \times i \times (-i) \times (-i) \times \alpha \times \beta = 1$, d'où $\alpha\beta = 1$. Les nombres α et β, sont les racines de l'équation $X^2 + X + 1 = 0$, d'où $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j$ et $\beta = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$.
   Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont i avec multiplicité 2, $-i$ avec multiplicité 2, j et $\overline{j}$.
3. *Donner la factorisation de P en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.*
   En regroupant chaque racine imaginaire avec sa conjuguée (i avec $-i$, j avec $\overline{j}$), on obtient
   $$P = (X^2 + 1)^2\,(X^2 + X + 1)\ .$$
4. *Trouver le pgcd unitaire de P et du polynôme dérivé P′.*
   Parmi les racines de P dans $\mathbb{C}$, i et $-i$ sont racines de P' de multiplicité 1, et j et $\overline{j}$ ne sont pas racines de P'. Les racines du pgcd de P et P' dans $\mathbb{C}$ sont donc i et $-i$ avec multiplicité 1, et le pgcd unitaire est $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$.