Contrôle Continu n°1 – Corrigé

Exercice 1 *Soit $P = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$. Donner explicitement le polynôme $P(X-1)$.*

On remarque que $P = (1+X)^3$. Donc $P(X-1) = (1+X-1)^3 = X^3$.

Exercice 2
Je suis un polynôme à coefficients réels de degré 3 et
- *je suis divisible par X^2+1,*
- *mon reste dans la division euclidienne par $X-1$ est 2,*
- *mon reste dans la division euclidienne par $X+1$ est -6,*

Qui suis-je ?

D'après la première condition, le polynôme recherché est de la forme $(X^2+1)(aX+b)$. D'après la deuxième, on a $2(a+b) = 2$ (le reste de la division d'un polynôme par $X-1$ est la valeur du polynôme pour $X = 1$). De manière analogue la troisième condition nous donne $2(-a+b) = -6$. Donc $b = -1$ et $a = 2$. Par conséquent, le polynôme recherché est $(X^2+1)(2X-1) = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$.

Exercice 3

1. *Calculer le pgcd unitaire D des polynômes*
$$A = 2X^3 - 4X^2 - X + 2 \quad et \quad B = X^3 - 3X^2 + 3X - 2 .$$
2. *Calculer un ppcm de A et B.*
3. *Calculer des polynômes U et V tels que $UA + VB = D$.*

1. Les divisions successives dans l'algorithme d'Euclide sont :
$$\begin{array}{rcl} A &=& B \times 2 + 2X^2 - 7X + 6 \\ B &=& (2X^2-7X+6)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}) + \frac{7}{4}X - \frac{14}{4} = (2X^2-7X+6)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}) + \frac{7}{4}(X-2) \\ 2X^2 - 7X + 6 &=& (X-2)(2X-3) \ . \end{array}$$
Le pgcd unitaire de A et B est donc $D = X - 2$.
2. On a $A = (2X^2-1)D$, et donc un ppcm de A et B est $(2X^2-1)B = 2X^5 - 6X^4 + 5X^3 - X^2 - 3X + 2$.
3. En remontant les calculs de l'algorithme d'Euclide, on obtient
$$\begin{array}{rcl} D &=& \frac{4}{7}\left(B - (2X^2-7X+6)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4})\right) = \frac{4}{7}\left(B - (A-2B)(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4})\right) \\ &=& \frac{4}{7}\left(-(\frac{1}{2}X + \frac{1}{4})A + (X + \frac{3}{2})B\right) = \frac{-1}{7}(2X+1)A + \frac{2}{7}(2X+3)B \ . \end{array}$$
On peut donc prendre $U = \frac{-1}{7}(2X+1)$ et $V = \frac{2}{7}(2X+3)$.