

Contrôle Continu n°1 – Corrigé

Exercice 1

1. Calculer le pgcd unitaire D des polynômes

$$A = 2 - X + X^2 + X^3 \quad \text{et} \quad B = 2 + 3X + 3X^2 + X^3 .$$

On effectue les divisions successives de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} A &= B - 2X^2 - 4X = B - 2(X^2 + 2X) , \\ B &= (X^2 + 2X)(X + 1) + X + 2 , \\ X^2 + 2X &= (X + 2)X . \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est $X + 2$. C'est le pgcd unitaire de A et B .

2. Calculer un ppcm de A et B .

Un ppcm est donné par

$$A \times B / D = A \times (X^2 + X + 1) = X^5 + 2X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 2 .$$

3. Calculer des polynômes U et V tels que $UA + VB = D$.

En remontant les calculs de l'algorithme d'Euclide, on obtient

$$\begin{aligned} X + 2 &= B - (X^2 + 2X)(X + 1) = B + \frac{1}{2}(A - B)(X + 1) \\ &= \frac{1}{2}(X + 1)A - \frac{1}{2}(X - 1)B . \end{aligned}$$

Exercice 2

Je suis un polynôme à coefficients réels de degré 3 et

- mon reste dans la division euclidienne par $X^2 + 1$ est $-2X$,
- j'ai -1 comme racine,
- mon reste dans la division euclidienne par $X - 1$ est 8.

Qui suis-je ?

Le polynôme P cherché peut s'écrire d'après la première condition et puisqu'il est de degré 3 :

$$P = (X^2 + 1)(aX + b) - 2X ,$$

où a et b sont des nombres réels à déterminer. D'après la deuxième condition,

$$P(-1) = 2(-a + b) + 2 = 0$$

et donc $a = b + 1$. D'après la dernière condition,

$$P(1) = 2(a + b) - 2 = 4b = 8$$

et donc $b = 2$ et $a = 3$. On obtient finalement

$$P = (X^2 + 1)(3X + 2) - 2X = 3X^3 + 2X^2 + X + 2 .$$