Chapitre 4

Séries formelles

4.1 Définition, opérations

Une série formelle en X sur le corps $\mathbb{K}$ est une expression :

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots ,$$

où les a_n sont des éléments de $\mathbb{K}$. Cette fois-ci, contrairement aux polynômes, on ne suppose pas qu'il n'y a qu'un nombre fini de coefficients a_n non nuls.

Pour formaliser cette définition, et définir les opérations (somme, produit par un scalaire de $\mathbb{K}$, produit de deux séries formelles), on considère une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ comme la suite de ses coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites indexées par $\mathbb{N}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ on définit la multiplication de $S = (a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et de $T = (b_q)_{q\in\mathbb{N}}$ en posant $S\,T = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p\ b_q$.

Définition 4.1 *L'espace vectoriel des suites d'éléments de* $\mathbb{K}$ *indexées par* $\mathbb{N}$*, muni de la multiplication interne définie ci-dessus, est une* $\mathbb{K}$*-algèbre commutative appelée* ***algèbre des séries formelles à une indéterminée sur*** $\mathbb{K}$*. Cette algèbre se note* $\mathbb{K}[[X]]$*.*

On continue bien sûr d'utiliser la notation $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ plutôt que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Les polynômes forment une sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles : ce sont les séries formelles qui n'ont qu'un nombre fini de coefficients non nuls.

Exercice 4.1
Calculer $(\sum_{n\geq 0} X^n)^2 = (1 + X + X^2 + \cdots)^2$.

4.2 Ordre, familles sommables

Définition 4.2 *Si* $S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$ *, si* $S \neq 0$ *, on appelle* ***ordre*** *(ou valuation) de* S*, noté* $\operatorname{ord}(S)$*, l'entier* $\min\{n \in \mathbb{N}\,,\ a_n \neq 0\}$*. On convient que* $\operatorname{ord}(0) = +\infty$*.*

Théorème 4.3 *Si* S *et* T *sont deux séries formelles, on a :*

$$\operatorname{ord}(S+T) \geq \min(\operatorname{ord}(S)\,,\ \operatorname{ord}(T)) \qquad \operatorname{ord}(ST) = \operatorname{ord}(S) + \operatorname{ord}(T)$$

Corollaire 4.4 $\mathbb{K}[[X]]$ *est une algèbre intègre.*

Exercice 4.2

Montrer que les séries formelles d'ordre $\geq N$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[[X]]$.

Définition 4.5 *Soit $(S_i)_{i\in I}$ une famille de séries formelles : $S_i = \sum_{n\geq 0} a_{i,n}X^n$. Cette famille est dite* ***sommable*** *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(a_{i,n})_{i\in I}$ ne comprend qu'un nombre fini de coefficients non nuls.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose alors $c_n = \sum_{i\in I} a_{i,n}$ et la série formelle $\sum_{n\geq 0} c_n X^n$ est appelée somme de la famille $(S_i)_{i\in I}$ et est notée $\sum_{i\in I} S_i$.

Exemples

- Si la famille $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ est telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{ord}(S_i) \geq i$, alors cette famille est sommable et on peut former $\sum_{i\in\mathbb{N}} S_i$.
- La famille $(a_n\, X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille sommable. Cela justifie la notation $\sum_{n\geq 0} a_n\, X^n$ pour désigner une série formelle.

Théorème 4.6 *1. Toute sous-famille d'une famille sommable est sommable.*

2. Si la famille $(S_i)_{i\in I}$ est sommable alors pour tout $T \in \mathbb{K}[[X]]$ la famille $(S_i\, T)_{i\in I}$ l'est aussi et on a : $\left(\sum_{i\in I} S_i\right) T = \sum_{i\in I} S_i\, T$.

4.3 Substitution d'une série formelle dans une autre

Définition 4.7 *Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ telle que $\mathrm{ord}(S) \geq 1$ et $T = \sum_{n\geq 0} b_n\, X^n \in \mathbb{K}[[X]]$. On appelle composée de T par S et on note $T(S)$ (ou $T \circ S$) la série formelle $\sum_{n\geq 0} b_n\, S^n$. On dit que $T \circ S$ est obtenue par* ***substitution de S à X dans T****.*

Il faut remarquer qu'il est essentiel de supposer $\mathrm{ord}(S) \geq 1$. Ceci entraîne que $\mathrm{ord}(b_n\, S^n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la famille $(b_n\, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien sommable.

Théorème 4.8 *L'application $T \mapsto T \circ S$ de $\mathbb{K}[[X]]$ dans lui-même est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.*

Ceci veut dire qu'on a les propriétés suivantes de la substitution :

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2) \circ S &= T_1 \circ S + T_2 \circ S \\ (T_1 T_2) \circ S &= (T_1 \circ S)(T_2 \circ S) \\ \lambda \circ S &= \lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{K})\end{aligned}$$

Théorème 4.9 *Soient S, T et U dans $\mathbb{K}[[X]]$ avec $\mathrm{ord}(S) \geq 1$, $\mathrm{ord}(T) \geq 1$ (et donc $\mathrm{ord}(S \circ T) \geq 1$). Alors $U \circ (T \circ S) = (U \circ T) \circ S$.*

Exercice 4.3

Si $\mathrm{ord}(S) = p$ et $\mathrm{ord}(T) = q$, que vaut $\mathrm{ord}(T \circ S)$?

4.4 Inverse d'une série formelle

Dans $\mathbb{K}[[X]]$, on a l'identité :

$$(1-X)\,(1+X+X^2+\cdots+X^n+\cdots)=1\,.$$

Donc $1-X$ est inversible et $(1-X)^{-1}=\sum_{n\geq 0}X^n$. C'est cet exemple fondamental qui nous permet de déterminer les séries formelles inversibles.

Théorème 4.10 *Soit* $S=\sum_{n\geq 0}a_n\,X^n\in\mathbb{K}[[X]]$.
Pour que S soit inversible dans $\mathbb{K}[[X]]$ il faut et il suffit que $a_0\neq 0$, c'est-à-dire que $\operatorname{ord}(S)=0$.

Exemple. Si S est une série formelle d'ordre ≥ 1, on a $(1-S)^{-1}=\sum_{n\geq 0}S^n$. Si $T=\sum_{n\geq 0}a_nX^n$ avec $a_0\neq 0$, alors on peut écrire $T=a_0(1-S)$ où $S=1-\dfrac{1}{a_0}T=\dfrac{-1}{a_0}(a_1X+a_2X^2+\cdots)$ est d'ordre ≥ 1, et $T^{-1}=\dfrac{1}{a_0}\sum_{n\geq 0}S^n$.

Pour $S=\sum_{n\geq 0}a_n\,X^n\in\mathbb{K}[[X]]$ on note $S_N=\sum_{n=0}^{N}a_n\,X^n$ (c'est le polynôme tronqué à l'ordre N de S) et on remarque que $\operatorname{ord}(S-S_N)\geq N+1$. Soit $T\in\mathbb{K}[[X]]$ inversible, et soit $Q=S\,T^{-1}$ dans $\mathbb{K}[[X]]$. Alors pour tout $N\in\mathbb{N}$, Q_N est le quotient dans la division suivant les puissances croissantes de S_N par T_N.

Définition 4.11 *Si $F=\dfrac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle sous forme réduite sans pôle en 0 (c'est-à-dire $Q(0)\neq 0$) alors la série formelle $P\,Q^{-1}$ est appelée* ***développement en série formelle de*** *F.*

Le développement en série formelle est un homomorphisme injectif de l'algèbre des fractions rationnelles sans pôle en 0 dans $\mathbb{K}[[X]]$. En particulier, le développement en série formelle d'une somme (resp. d'un produit) de fractions rationnelles sans pôle en 0 est la somme (resp. le produit) des développements en série formelle. Concrètement, il peut être commode pour calculer le développement en série formelle de passer par la décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{C}$, comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 4.4

Développer en série formelle $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)}$.

Mais pour l'exercice suivant, la décomposition en éléments simples n'est pas une bonne idée.

Exercice 4.5

Développer en série formelle $\dfrac{1}{(1-X^5)}$.

Quelques autres exercices.

Exercice 4.6

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le développement en série formelle de la fraction $\dfrac{1}{(1-X)^{n+1}}$ est donné par :

$$\frac{1}{(1-X)^{n+1}} = \sum_{p \geq 0} \binom{n+p}{p} X^p \,.$$

Exercice 4.7

Développer en série formelle :

(a) $F = \dfrac{1}{1 + X + X^2 + \cdots + X^{n-1}}$

(b) $F = \dfrac{1}{(1-aX)^p\,(1-bX)^q}$ $\quad (a \neq b)$

Exercice 4.8

1. Développer en série formelle $\dfrac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$ en utilisant la décomposition en éléments simples.
2. De combien de manières différentes peut-on payer une somme de 2007 zeuros avec des pièces de 1, 2 et 3 zeuros ?

4.5 Dérivée d'une série formelle

Définition 4.12 *Si $S = \sum_{n \geq 0} a_n\, X^n \in \mathbb{K}[[X]]$, on appelle* ***dérivée de*** *S et on note S' la série formelle $\sum_{n \geq 0} (n+1)\, a_{n+1}\, X^n$.*

La dérivation des séries formelles prolonge la dérivation des polynômes (et aussi celle des fractions rationnelles sans pôle en 0), et elle possède les propriétés habituelles :

$$(S+T)' = S' + T', \qquad (\lambda S)' = \lambda\, S' \quad (\lambda \in \mathbb{K}), \qquad (ST)' = S'T + S\,T' \,.$$

Exercice 4.9

Déduire des propriétés ci-dessus que si S est d'ordre 0, $(S^{-1})' = -S'/S^2$.

Exercice 4.10

Retrouver en utilisant la dérivation le résultat de l'exercice 6.

Exercice 4.11

Développer en série formelle, selon trois méthodes, la fraction $\dfrac{1}{(1+X)^2}$.

4.6 Séries de Taylor de fonctions usuelles

Soit f une fonction C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0. On peut lui associer sa série de Taylor (en 0)

$$\mathrm{Taylor}(f) = f(0) + f'(0)X + \frac{f''(0)}{2}X^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}X^3 \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}X^n + \cdots$$

Les tronqués de la séries de Taylor sont les parties principales des développements limités de la fonction f en 0. L'application $f \mapsto \mathrm{Taylor}(f)$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de $C^\infty(I, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}[[X]]$. En particulier on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Taylor}(f+g) &= \mathrm{Taylor}(f) + \mathrm{Taylor}(g) \\ \mathrm{Taylor}(f\,g) &= \mathrm{Taylor}(f) \times \mathrm{Taylor}(g) \end{aligned}$$

On a aussi $\mathrm{Taylor}(f') = (\mathrm{Taylor}(f))'$.

Dans ce qui suit nous ferons l'abus de notation qui consiste à désigner de la même façon une fonction et sa série de Taylor.

Séries formelles usuelles

$$\begin{aligned} \exp(aX) &= \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}\, X^n \\ \mathrm{ch}(X) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!}\, X^{2n} \\ \mathrm{sh}(X) &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!}\, X^{2n+1} \\ \cos X &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, X^{2n} \\ \sin X &= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, X^{2n+1} \\ \ln(1+X) &= \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, X^n \\ (1+X)^\alpha &= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, X^n \end{aligned}$$

Nous ne nous poserons pas ici la question inverse : peut-on définir une fonction à partir d'une série formelle ? C'est le problème de la convergence des séries entières, traité dans le cours du module D02.

Exercice 4.12

Développer en série formelle :

(a) $\dfrac{1}{\cos X}$

(b) $\dfrac{1}{1+\sin X}$

(On ne donnera que les premiers termes.)

Exercice 4.13

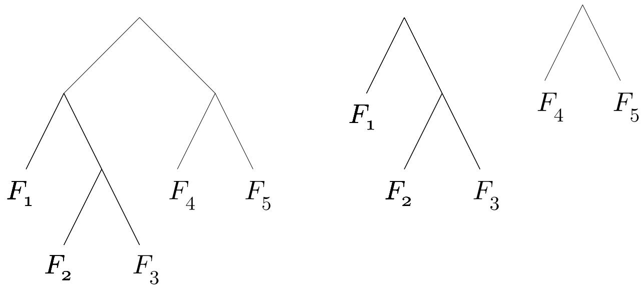
Développer en série formelle, selon deux méthodes : $\sin 2X$.

Exercice 4.14

Montrer que le développement en série formelle de $\sqrt{1-X}$ est

$$1-\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}X^2-\frac{3}{8}X^{"}-\cdots-\frac{2}{n4^n}\binom{2n-2}{n-1}X^n-\cdots$$

Nous terminons avec une application des séries à un problème de dénombrement : on veut déterminer le nombre b_n d'arbres binaires à n feuilles (avec $n \geq 1$). Voici à gauche un arbre binaire avec cinq feuilles $F_1, \ldots, F_5$.



Nous allons calculer la série formelle $S = \sum_{n\geq 1} b_n X^n$, appelée la série génératrice du problème de dénombrement. Cette méthode est employée pour un grand nombre de problèmes de dénombrement, et nous en avons vu un autre exemple dans l'exercice 8.

Parmi les arbres binaires il y a :

– l'arbre trivial réduit à un seul point qui est à la fois la racine et l'unique feuille ;
– les arbres où la racine a pour descendants un sous-arbre binaire à gauche et un autre sous-arbre binaire à droite. Le nombre total de feuilles est alors la somme des nombres de feuilles du sous-arbre de gauche et du sous-arbre de droite (voir le dessin ci-dessus).

On a donc $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ (correspond à l'arbre trivial) et $b_n = \sum_{p+q=n} b_p b_q \quad (*)$ pour $n \geq 2$, correspondant aux différents choix possibles des sous-arbres de gauche et de droite. La série génératrice vérifie donc l'équation $S = X + S^2$, et c'est la solution dans $\mathbb{R}[[X]]$ entièrement déterminée par le fait qu'elle commence par X (en effet la suite b_n est entièrement déterminée par $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et la relation $(*)$). Or, les solutions de $S^2 - S + X = 0$ sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4X}}{2}$ et la solution qui commence par X est

$$S = \frac{1-\sqrt{1-4X}}{2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} X^n$$

(on a utilisé la formule de l'exercice 14). Le nombre d'arbres binaires à n feuilles est donc $\dfrac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ (par exemple, $b_{10} = 442$). Ces nombres sont appelés les **nombres de Catalan**.