Chapitre 3

Fractions rationnelles

3.1 Corps de fractions d'un anneau intègre. Fractions rationnelles

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif intègre (par exemple $\mathbb{Z}$, ou l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$). On va fabriquer à partir de $\mathbb{A}$ un corps en inversant les éléments non nuls de $\mathbb{A}$.

Sur l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{A}$ avec $b \neq 0$, on définit la relation $\sim$ par

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \text{si et seulement si} \quad ad = bc\,.$$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. On note $\dfrac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a, b) ; on a donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$. On note $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ l'ensemble de ces classes d'équivalences (fractions). On définit sur $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ l'addition et la multiplication par :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

Ces opérations sont bien définies : pour l'addition, ceci veut dire que si $(a, b) \sim (a', b')$ et $(c, d) \sim (c', d')$, alors $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$.

Théorème 3.1 $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$*, muni de l'addition et de la multiplication, est un corps. On l'appelle le* ***corps de fractions de*** $\mathbb{A}$*. L'application* $\mathbb{A} \to \mathrm{Frac}(\mathbb{A})$ *qui envoie* a *sur* $\dfrac{a}{1}$ *est un homomorphisme injectif d'anneaux, qui permet d'identifier* $\mathbb{A}$ *à un sous-anneau de* $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$*.*

Avec cette identification, tout élément b non nul de $\mathbb{A}$ a un inverse $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$ dans $\mathrm{Frac}(\mathbb{A})$, et $\dfrac{a}{b} = a \times b^{-1}$.

Le corps de fractions de $\mathbb{Z}$ est bien sûr $\mathbb{Q}$, le corps des nombres rationnels.

Définition 3.2 *Le* ***corps des fractions rationnelles*** *en X à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ est le corps de fractions de $\mathbb{K}[X]$. On le note $\mathbb{K}(X)$.*

On peut choisir un représentant privilégié pour une fraction rationnelle : Une fraction rationnelle est dite sous **forme réduite** quand elle est écrite comme $\frac{A}{B}$, où A et B sont des polynômes premiers entre eux et B est unitaire. Une fraction rationnelle a une unique forme réduite. Si $F = \frac{P}{Q}$, on trouve sa forme réduite en calculant un pgcd D de P et Q ; on a alors $Q = \lambda\, D\, B$ avec B polynôme unitaire et $\lambda \in \mathbb{K}$ constante non nulle, et on définit A par $P = \lambda\, D\, A$; la forme réduite de F est $\frac{A}{B}$.

On a l'habitude de dire que P est le numérateur et Q le dénominateur de la fraction $\frac{P}{Q}$. Mais ceci est un abus de langage, car le numérateur et le dénominateur sont associés à un représentant de la fraction, et pas à la fraction elle-même. On peut cependant parler du numérateur et du dénominateur de la forme réduite d'une fraction rationnelle, grâce à l'unicité de celle-ci.

Exercice 3.1

Mettre sous forme réduite les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3+4X^2+X-6}{X^4-X^3-5X^2-X-6} \qquad \frac{X^4+X^2+1}{X^3+3X^2+3X+2} \ .$$

Exercice 3.2

Pour $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$. Montrer que $\deg(F)$ est bien défini (ne dépend pas du représentant choisi de la fraction rationnelle) et que $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$ et $\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$.

Montrer que les fractions rationnelles de degré ≤ 0 forment une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

3.2 Fonction rationnelle

Définition 3.3 *Soit $F \in \mathbb{K}[X]$ une fraction rationnelle, $F = \frac{A}{B}$ sa forme réduite. Un* pôle *de F (dans $\mathbb{K}$) est une racine de B (dans $\mathbb{K}$). La multiplicité du pôle est sa multiplicité en tant que racine de B. Un* zéro *de F (dans $\mathbb{K}$) est une racine de A (dans $\mathbb{K}$). La multiplicité du zéro est sa multiplicité en tant que racine de A*

Une fraction rationnelle a un nombre fini de pôles. Une fraction rationnelle non nulle a un nombre fini de zéros.

Si $F = \frac{A}{B}$ est une fraction rationnelle sous forme réduite, et c un élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle de F, alors on peut définir la valeur de F en c par

$$F(c) = \frac{A(c)}{B(c)} \in \mathbb{K} \ .$$

Si $\dfrac{C}{D}$ est un autre représentant de F et que $D(c) \neq 0$, alors on a aussi $F(c) = \dfrac{B(c)}{D(c)}$.

On obtient ainsi la **fonction rationnelle** $c \mapsto F(c)$ associée à la fraction rationnelle F. Cette fonction rationnelle est définie sur $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble (fini) des pôles de F. On a $F(c) = 0$ si et seulement si c est un zéro de F. Si c n'est pôle ni de F ni de G, on a $(F+G)(c) = F(c)+G(c)$ et $(F\times G)(c) = F(c)\times G(c)$.

Théorème 3.4 *(On suppose le corps $\mathbb{K}$ infini.) Soit F et G deux fractions rationnelles telles que pour tout $c \in \mathbb{K}$ qui n'est pôle ni de F ni de G, on a $F(c) = G(c)$. Alors $F = G$.*

On peut substituer une fraction rationnelle non constante à l'indéterminée dans une autre fraction rationnelle. Soit $G = \dfrac{A}{B}$ non constante sous forme réduite, et

$$F = \frac{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n}{b_0 + b_1X + \cdots + b_qX^q}\ ,$$

alors on pose

$$\begin{aligned} F(G) &= (a_0 + a_1G + \cdots + a_nG^n) \times (b_0 + b_1G + \cdots + b_qG^q)^{-1} \\ &= B^{q-n}\,\frac{a_0B^n + a_1AB^{n-1} + \cdots + a_nA^n}{b_0B^q + b_1AB^{q-1} + \cdots + b_qA^q} \end{aligned}$$

Cette substitution est bien licite car la fraction rationnelle $b_0 + b_1G + \cdots + b_qG^q$ n'est pas la fraction rationnelle nulle.

Proposition 3.5 *Soit G une fraction rationnelle non constante. L'application $F \mapsto F(G)$ de $K(X)$ dans lui-même est un homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

La substitution correspond à la composition des fonctions rationnelles, là où la composée est définie : si $c \in \mathbb{K}$ n'est pas un pôle de G et $G(c)$ n'est pas un pôle de F, alors c n'est pas un pôle de $F(G)$ et $F(G)(c) = F(G(c))$.

Exercice 3.3

Soit $c \in \mathbb{K}$. L'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ dont c n'est pas pôle est-il une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$? L'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbb{K}(X)$ dont c est un zéro est-il une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}(X)$?

Exercice 3.4

Comparer les pôles et les zéros de $F(X + a)$ à ceux de F.

Exercice 3.5

Soit $G = \dfrac{aX + b}{cX + d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Montrer que $F \mapsto F(G)$ est un homomorphisme bijectif de $\mathbb{K}(X)$ sur lui-même, et trouver la bijection réciproque.

3.3 Décomposition en éléments simples

3.3.1 Le théorème général

Théorème 3.6 *Soit* $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle, où on suppose* B *unitaire non constant (*$\deg(B) > 0$*). Soit*

$$B = P_1^{\alpha_1} \cdots P_n^{\alpha_n}$$

sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ *(les* P_i *sont irréductibles unitaires distincts deux à deux, et les* α_i *sont des entiers strictement positifs). Alors il existe une unique famille de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$

$$(E, C_{1,1}, C_{1,2} \dots, C_{1,\alpha_1}, C_{2,1}, \dots, C_{2,\alpha_2}, \dots, C_{n,\alpha_n})$$

telle que $\deg(C_{i,j}) < \deg(P_i)$ *(ou* $C_{i,j} = 0$*) pour tout* $i = 1, \dots, n$ *et tout* $j = 1, \dots, \alpha_i$*, et que*

$$F = E + \frac{C_{1,1}}{P_1} + \frac{C_{1,2}}{P_1^2} + \cdots + \frac{C_{1,\alpha_1}}{P_1^{\alpha_1}} + \frac{C_{2,1}}{P_2} + \cdots + \frac{C_{2,\alpha_2}}{P_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{C_{n,\alpha_n}}{P_n^{\alpha_n}} .$$

Les fractions rationnelles $\dfrac{C}{P^j}$ avec P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et $\deg(C) < \deg(P)$, $C \neq 0$, s'appellent des **éléments simples**. La décomposition de F donnée par le théorème ne dépend pas du choix du représentant (A, B) pour la fraction rationnelle. Elle s'appelle la **décomposition en éléments simples de** F.

Le polynôme E s'appelle la **partie entière** de F. Si $F = \dfrac{A}{B}$, c'est le quotient de la division euclidienne de A par B.

Les éléments simples qui peuvent apparaître dans la décomposition de F sont les $\dfrac{C}{P^j}$ où P est un facteur irréductible du dénominateur de la forme réduite de F, et j est inférieur ou égal à la plus grande puissance α avec laquelle P divise ce dénominateur ; de plus, il y a nécessairement un élément simple $\dfrac{C}{P^\alpha}$ avec $C \neq 0$ dans la décomposition de F.

3.3.2 Pratique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$, qu'on supposera toujours sous forme réduite,

$$B = (X - a_1)^{\alpha_1} (X - a_2)^{\alpha_2} \cdots (X - a_n)^{\alpha_n} .$$

Les $a_i \in \mathbb{C}$ sont les pôles de F, et α_i leurs multiplicités. La décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = E + \frac{c_{1,1}}{X - a_1} + \frac{c_{1,2}}{(X - a_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1,\alpha_1}}{(X - a_1)^{\alpha_1}} + \frac{c_{2,1}}{X - a_2} + \cdots + \frac{c_{n,\alpha_n}}{(X - a_n)^{\alpha_n}} ,$$

où E est la partie entière de F et $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, \alpha_i$. La partie

$$\frac{c_{i,1}}{X - a_i} + \frac{c_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \cdots + \frac{c_{i,\alpha_i}}{(X - a_i)^{\alpha_i}}$$

de la décomposition s'appelle la **partie polaire relative au pôle** a_i. Remarquer que si l'on soustrait à F sa partie polaire relative au pôle a_i, on obtient une fraction rationnelle qui n'a plus a_i pour pôle.

Le nombre c_{i,α_i} se détermine facilement.

Proposition 3.7 *(Les notations sont celles qui ont été introduites ci-dessus). Si $B = (X - a_i)^{\alpha_i} S$, avec $S(a_i) \neq 0$, on a $c_{i,\alpha_i} = A(a_i)/S(a_i)$. Si $\alpha_i = 1$ (a_i est pôle simple de F), alors $c_{i,1} = A(a_i)/B'(a_i)$.*

Exemple :

$$F = \frac{5X^3 + 11X^2 - 2X - 2}{X^4 + 2X^3 - X^2 - 2X}.$$

On trouve facilement les racines $0, 1, -1, -2$ du dénominateur (toutes simples). la décomposition aura la forme

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{X+2}.$$

La dérivée du dénominateur est $4X^3+6X^2-2X-2$. On obtient donc en évaluant le quotient du numérateur par la dérivée du dénominateur : $a = \frac{-2}{-2} = 1$, $b = \frac{12}{6} = 2$, $c = \frac{6}{2} = 3$, $d = \frac{6}{-6} = -1$, et donc

$$F = \frac{1}{X} + \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X+1} + \frac{-1}{X+2}.$$

Il est toujours prudent de vérifier. Une première méthode consiste à multiplier par X des deux côtés et faire tendre X vers $+\infty$; on trouve bien 5 des deux côtés. Une deuxième méthode consiste à fixer pour X une valeur qui n'est pas un pôle (par exemple 2) et à évaluer des deux côtés : on trouve bien $\frac{13}{4}$ des deux côtés.

Un autre exemple :

$$F = \frac{3X^2 - X + 1}{X^2(X+1)}.$$

La décomposition aura la forme

$$F = \frac{a}{X^2} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X+1}.$$

Les coefficients a et c se calculent par la méthode de la proposition 3.7. On a $a = \frac{1}{1} = 1$, $c = \frac{5}{1} = 5$. Pour b, on peut multiplier par X des deux côtés et faire tendre X vers $+\infty$. On obtient $3 = b + 5$, d'où $b = -2$. Finalement

$$F = \frac{1}{X^2} + \frac{-2}{X} + \frac{5}{X+1}.$$

En faisant $X = 1$, on obtient bien $\frac{3}{2}$ des deux côtés.

On peut calculer la partie polaire de F relative à un pôle a en amenant ce pôle en 0 par la substitution de $a + Y$ à X et en utilisant la division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Théorème 3.8 (Division des polynômes suivant les puissances croissantes) *Soient A et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $S(0) \neq 0$. Soit n un entier naturel. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que*

$$A = S\,Q + X^{n+1}R \quad \textit{et} \quad \deg(Q) \leq n\,.$$

*Le polynôme Q est le **quotient de la division suivant les puissances croissantes de A par S à l'ordre** n. Le reste de cette division est $X^{n+1}R$.*

Proposition 3.9 *Supposons que a soit pôle de F d'ordre α : $F = \dfrac{A}{(X-a)^\alpha S}$ avec $A(a) \neq 0$ et $S(a) \neq 0$. Soit*

$$A(a+Y) = S(a+Y) \times (c_1 Y^{\alpha-1} + c_2 Y^{\alpha-2} + \cdots + c_\alpha) + Y^\alpha R$$

la division de $A(a+Y)$ par $S(a+Y)$ suivant les puissances croissantes de Y à l'ordre $\alpha - 1$. Alors la partie polaire de F relative au pôle a est

$$\frac{c_1}{X-a} + \frac{c_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{c_\alpha}{(X-a)^\alpha}\,.$$

En pratique, on n'utilise cette méthode de la division selon les puissances croissantes que pour les pôles d'ordre élevé (au moins 3). On utilise souvent d'autres outils de détermination : donner une valeur particulière à l'indéterminée X (ce qui est toujours recommandé pour vérifier les calculs), multiplier par X et "faire tendre X vers $+\infty$", utiliser des propriétés de parité...

Exemple : Soit

$$F = \frac{2X^5 + 10X^3 + 12X}{(X+1)^3(X-1)^3}.$$

La décomposition va être de la forme

$$F = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}.$$

Pour déterminer la partie polaire relative au pôle 1, on fait le changement de variable $X = 1 + Y$ avant de faire la division suivant les puissances croissantes. Comme on veut faire une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2, on peut oublier les puissances de Y plus grandes que 2 :

$$F(1+Y) = \frac{2(1+Y)^5 + 10(1+Y)^3 + 12(1+Y)}{((1+Y)+1)^3((1+Y)-1)^3} = \frac{24 + 52Y + 50Y^2 + \cdots}{Y^3(8 + 12Y + 6Y^2 + \cdots)}.$$

Ensuite on fait la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $24 + 52Y + 50Y^2 + \cdots$ par $8 + 12Y + 6Y^2 + \cdots$. Comme on est seulement intéressé par le quotient, on oublie tout ce qui dépase le degré 2 :

$$\begin{array}{rrrl|l}
24 & +52Y & +50Y^2 & +\cdots & 8 + 12Y + 6Y^2 + \cdots \\ \cline{5-5}
 & 16Y & +32Y^2 & +\cdots & 3 + 2Y + Y^2 \\
 & & 8Y^2 & +\cdots & \\
 & & & \cdots &
\end{array}$$

et on a

$$F = \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1}.$$

On pourrait recommencer pour obtenir la partie polaire relative au pôle -1, mais il vaut mieux raisonner en **utilisant la parité**. En changeant X en $-X$, on obtient

$$-F(X) = F(-X) = \frac{-3}{(X+1)^3} + \frac{2}{(X+1)^2} + \frac{-1}{X+1} + \frac{-d}{(X-1)^3} + \frac{e}{(X-1)^2} + \frac{-f}{X-1}.$$

Finalement

$$F = \frac{3}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{3}{(X+1)^3} + \frac{-2}{(X+1)^2} + \frac{1}{X+1}.$$

3.3.3 Pratique de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit maintenant $F = \dfrac{A}{B}$ une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$, toujours sous forme réduite,

$$B = (X-a_1)^{\alpha_1} \cdots (X-a_n)^{\alpha_n} ((X-u_1)^2 + v_1^2)^{\beta_1} \cdots ((X-u_p)^2 + v_p^2)^{\beta_p}$$

la décomposition du dénominateur en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$. La décomposition en éléments simples de F est de la forme

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{c_{i,1}}{X-a_i} + \cdots + \frac{c_{i,\alpha_i}}{(X-a_i)^{\alpha_i}} \right) + \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{d_{j,1}X + e_{j,1}}{(X-u_j)^2 + v_j^2} + \cdots + \frac{d_{j,\beta_j}X + e_{j,\beta_j}}{((X-u_j)^2 + v_j^2)^{\beta_j}} \right),$$

où les $c_{i,k}$ et les $d_{j,\ell}$ et $e_{j,\ell}$ sont des nombres réels. Les éléments simples de la forme $\dfrac{c}{(X-a)^k}$ s'appellent **éléments simples de première espèce**, ceux de la forme $\dfrac{dX+e}{((X-u)^2+v^2)^\ell}$ **éléments simples de deuxième espèce**. La décomposition en éléments simples est utile pour l'intégration des fonctions rationnelles.

Pour effectuer la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ d'une fraction rationnelle à coefficients réels, on peut effectuer la décomposition sur $\mathbb{C}$ puis regrouper les parties polaires correspondant aux pôles conjugués $u_j + iv_j$ et $u_j - iv_j$, ce qui est facile si ces pôles sont simples. On peut utiliser d'autres méthodes.

Un exemple :

$$F = \frac{X(2X^4 + 3X^3 + 7X^2 + 4X + 4)}{(X^2+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)}$$

On multiplie par X^2+1 et on fait $X = i$. On obtient

$$\frac{i(2-3i-7+4i+4)}{(-1+i+1)^2} = ai + b,$$

ce qui donne $a = 1$ et $b = 1$. On peut ensuite calculer c et d en multipliant par $(X^2+X+1)^2$ et en faisant $X = j$ (racine de X^2+X+1), puis trouver e et f

en multipliant par X et en faisant tendre X vers $+\infty$, et en faisant $X = 0$. On peut aussi procéder ainsi :

$$\frac{cX+d}{(X^2+X+1)^2} + \frac{eX+f}{(X^2+X+1)} = F - \frac{X+1}{X^2+1} = \frac{X^3+X-1}{(X^2+X+1)^2}.$$

On fait la division euclidienne $X^3 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X - 1) + X$, et on a finalement :

$$F = \frac{X(2X^4+3X^3+7X^2+4X+4)}{(X^2+1)(X^2+X+1)^2} = \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{X}{(X^2+X+1)^2} + \frac{X-1}{(X^2+X+1)}.$$

Exercice 3.6

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $X^3 + X^2 + 1$ à l'ordre 6. Trouver le quotient de la division suivant les puissances croissantes de $(X+1)^{10}$ par $(X-1)^7$ à l'ordre 2.

Exercice 3.7

Décomposition en éléments simples :

(a) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ (b) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(c) $\dfrac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)}$ (d) $\dfrac{X(X^6-1)}{(X^2-1)^3}$

(e) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$ (f) $\dfrac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$

(g) $\dfrac{X^2}{(X-1)^2(X+1)^3}$ (h) $\dfrac{X^2+1}{((X-1)(X-2)(X-3))^2}$

(i) $\dfrac{-12X}{X^6-14X^4+49X^2-36}$ (j) $\dfrac{1}{(X^3+3X^2+2X)^4}$

Exercice 3.8

Exemples de décomposition en éléments simples de première et de seconde espèces, dans $\mathbb{R}(X)$:

(a) $\dfrac{X^5}{(X^2+X+1)^3}$ (b) $\dfrac{2X^5+19X^4+76X^3+157X^2+165X+72}{(X^2+4X+5)^3}$

(c) $\dfrac{X^6-2X^5+4X^4-6X^3-X^2+8X+121}{(X-1)^3(X^2+4)}$ (d) $\dfrac{1}{(X-1)^5X(X^2+1)}$

(e) $\dfrac{X^9}{(X^2-1)^3(X^2+X+1)^2}$ (f) $\dfrac{4(X^6+2)}{(X-1)^3(X^2+1)^2}$

(g) $\dfrac{X}{(X^2-1)(X^2+1)^3}$

Exercice 3.9

Décomposer sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X - X^3}{(1+X^4)(1+X^2)^4} \quad \text{et} \quad \frac{X^2}{(X+1)^3(X^2+X+1)^2}$$

Exercice 3.10

Décomposer sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3 - 4X^2 + 2X + 1}{(X^2+1)(X^2+4)} \quad \text{et} \quad \frac{X^5+5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}$$

Exercice 3.11

Décomposer sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{1}{X^{2n}-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{X^{2n+1}-1}$$

Exercice 3.12

Décomposer $\dfrac{1}{(X^2-1)^n}$ et $\dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. *Indication pour le premier : on peut penser à développer* $2^n = \big((X+1)-(X-1)\big)^n$ *en utilisant la formule du binôme, puis à diviser par* $(X^2-1)^n$.

Exercice 3.13

Décomposer $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$ et $\dfrac{X^2}{(X+1)^3(X-1)^2}$.

Exercice 3.14

Décomposer $\dfrac{4X^2+X+4}{(X-1)(X+2)^2}$ et $\dfrac{X^6}{(X^2-5X+6)(X-1)^3}$.

Exercice 3.15

Décomposer $\dfrac{X^8+X+1}{X^4(X-1)^3}$ et $\dfrac{X^4+1}{X^2(X^2+X+1)^2}$.

Exercice 3.16

Décomposer $\dfrac{X^6}{(X^2+1)^2(X+1)^2}$ et $\dfrac{(X^2+1)^2}{(X-1)^6}$.

Exercice 3.17

Décomposer $\dfrac{X^4+1}{X^4+X^2+1}$ et $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos a+1}$.