LICENCE
B05 : Polynômes, fractions rationnelles et séries formelles

Corrigé de l'examen du 19 Juin 2007

Exercice 1.

On pose

$$F = \frac{X^3 - X^2 - X + 1}{X^4 - 2\,X^3 - 8\,X^2 + 18\,X - 9} \,.$$

Trouvez les pôles de F. (Attention, F n'est peut-être pas donnée sous forme réduite, ou irréductible).

Pour mettre la fraction rationnelle F sous forme réduite, on calcule le pcgd du numérateur $N = X^3 - X^2 - X + 1$ et du dénominateur $D = X^4 - 2\,X^3 - 8\,X^2 + 18\,X - 9$ par l'algorithme d'Euclide. Les divisions euclidiennes donnent:

$$\begin{aligned} D &= N\,(X-1) - 8\,(X^2 - 2\,X + 1) \,, \\ N &= (X^2 - 2\,X + 1)\,(X+1) \,. \end{aligned}$$

Le pgcd unitaire de N et D est donc $X^2 - 2\,X + 1$. Le dénominateur de la fraction sous forme réduite est le quotient de D par $X^2 - 2\,X + 1$, soit $X^2 - 9$. Ce polynôme du second degré a pour racines 3 et -3. Les pôles de F sont donc 3 et -3, tous deux de multiplicité 1.

Exercice 2.

Soient a, b, c des nombres réels distincts.

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(a) = P(b) = P(c)$. Expliquez pourquoi le polynôme P est constant.*

   Notoms $m = P(a) = P(b) = P(c)$. Le polynôme $P - m$ est de degré inférieur ou égal à 2, et il a trois racines a, b et c. C'est donc le polynôme nul, et $P = m$ est bien constant.

2. *Que vaut la quantité*

   $$\frac{(2007-a)(2007-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(2007-b)(2007-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(2007-c)(2007-a)}{(b-c)(b-a)} \;?$$

   Posons
   $$Q = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} \,,$$
   de telle sorte que la quantité recherchée est $Q(2007)$. Le polynôme Q est de degré inférieur ou égal à 2 car c'est la somme de trois polynômes de degré 2, et on a $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 1$. Donc Q est le polynôme constant 1, et la quantité recherchée vaut 1.

Exercice 3.

Décomposez en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle

$$G = \frac{8}{(X-1)^3(X^2+1)} \,.$$

La fraction rationnelle G est sans partie entière, et sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ aura la forme

$$G = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d\,X + e}{X^2+1} \,,$$

où a, b, c, d, e sont des réels. Pour trouver la partie polaire relative au pôle 1, on peut faire le changement de variable $Y = X - 1$ et effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 8 par $(1+Y)^2 + 1 = 2 + 2\,Y + Y^2$. On trouve

$$8 = (2 + 2\,Y + Y^2)\,(4 - 4\,Y + 2\,Y^2) + X^3\,R \,,$$

où R est un polynôme qu'on n'a pas besoin de calculer. On obtient $a = 4$, $b = -4$ et $c = 2$.

Pour déterminer d et e, on peut multiplier G par $X^2 + 1$ et faire $X = i$. On obtient

$$d\,i + e = \frac{8}{(i-1)^3} = \frac{4}{1+i} = 2\,(1-i)\ ,$$

d'où $d = -2$ et $e = 2$.

La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est donc

$$G = \frac{4}{(X-1)^3} - \frac{4}{(X-1)^2} + \frac{2}{X-1} + \frac{-2\,X+2}{X^2+1}\ ,$$

Pour obtenir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, il suffit de déterminer les nombres complexes α et β tels que

$$\frac{-2\,X+2}{X^2+1} = \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\beta}{X+i}\ .$$

En réduisant au même dénominateur le terme de droite et en identifiant, on obtient $\alpha+\beta = -2$ et $i\,(\alpha-\beta) = 2$, d'où $\alpha = -1-i$ et $\beta = -1+i$. Finalement, la décomposition en éléments simples de G sur $\mathbb{C}$ est

$$G = \frac{4}{(X-1)^3} - \frac{4}{(X-1)^2} + \frac{2}{X-1} - \frac{1+i}{X-i} - \frac{1-i}{X+i}\ .$$

Exercice 4.

1. *Quel est le développement en série formelle de* $\dfrac{1}{1-X^5}$ *?*

   On l'obtient en substituant X^5 à X dans le développement en série formelle de $\dfrac{1}{1-X}$. C'est

   $$\frac{1}{1-X^5} = 1 + X^5 + X^{10} + X^{15} + \cdots = \sum_{n\geq 0} X^{5\,n}\ .$$

2. *Quel est le développement en série formelle de* $\dfrac{1}{(1+X)^2}$ *?*

   On peut l'obtenir en prenant l'opposé de la dérivée du développement en série formelle de $\dfrac{1}{1+X}$. C'est

   $$\frac{1}{(1+X)^2} = 1 - 2\,X + 3\,X^2 - 4\,X^3 + \cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n (n+1)\,X^n\ .$$

3. *Quel est le coefficient de* X^{100} *dans le développement en série formelle de* $\dfrac{1}{(1-X^5)\,(1+X)^2}$ *?*

   Le développement en série formelle de $\dfrac{1}{(1-X^5)\,(1+X)^2}$ est le produit

   $$(1 + X^5 + X^{10} + X^{15} + \cdots)\,(1 - 2\,X + 3\,X^2 - 4\,X^3 + \cdots) = \left(\sum_{n\geq 0} X^{5\,n}\right)\,\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n (n+1)\,X^n\right)\ .$$

   Le coefficient de X^{100} dans ce produit est

   $$(101-96) + (91-86) + \cdots + (11-6) + 1 = 10\times 5 + 1 = 51\ .$$