LICENCE
B05 : Polynômes, fractions rationnelles et séries formelles

Corrigé de l'examen du 10 Mai 2007

Exercice 1.

On pose

$$P = X^8 + X^7 - 39X^6 + 3X^5 - 123X^4 + 3X^3 - 125X^2 + X - 42 \ .$$

1. *Quelle est la multiplicité du nombre complexe i comme racine de P ?*

   On a

$$\begin{aligned}
P(i) &= i^8 + i^7 - 39i^6 + 3i^5 - 123i^4 + 3i^3 - 125i^2 + i - 42 \\
&= 1 + 39 - 123 + 125 - 42 + (-1 + 3 - 3 + 1)i = 0 \ , \\
P'(i) &= 8i^7 + 7i^6 - 234i^5 + 15i^4 - 492i^3 + 9i^2 - 250i + 1 \\
&= -7 + 15 - 9 + 1 + (-8 - 234 + 492 - 250)i = 0 \ , \\
P''(i) &= 56i^6 + 42i^5 - 1170i^4 + 60i^3 - 1476i^2 + 18i - 250 \\
&= -56 - 1170 + 1476 - 250 + (42 - 60 + 18)i = 0 \ , \\
P'''(i) &= 336i^5 + 210i^4 - 4680i^3 + 180i^2 - 2952i + 18 \\
&= 210 - 180 + 18 + (336 + 4680 - 2952)i \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

   Donc la multiplicité de i comme racine de P est 3.

2. *Pouvez-vous en déduire que P a exactement deux racines réelles: une positive $a > 0$ et une négative $b < 0$? (On pourra prendre en compte le signe de $P(0)$).*

   Comme P est à coefficients réels, le conjugué $-i$ de i est aussi racine de P de multiplicité 3. Il reste deux autres racines de P (comptées avec multiplicité). Or $P(0) = -42 < 0$ et $P(x)$ a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme P a au moins une racine réelle $a > 0$ et une racine réelle $b < 0$, et d'après ce qu'on a dit plus haut il n'en a pas d'autre.

3. *Que vaut $a + b$? ab ?*

   La somme des racines de P comptées avec multiplicité est

$$3 \times i + 3 \times (-i) + a + b = a + b \ .$$

   C'est aussi l'opposé du coefficient de X^7 dans P. Donc $a + b = -1$.

   Le produit des racines de P comptées avec multiplicité est

$$i^3 \times (-i)^3 \times a \times b = ab \ .$$

   C'est aussi le terme constant dans P. Donc $ab = -42$.

4. *Déterminer a et b.*

   Il découle de la question précédente que a et b sont les racines de l'équation $x^2 + x - 42 = 0$ et donc (puisque $a > 0$ et $b < 0$) $a = 6$ et $b = -7$.

Exercice 2.

Est-ce que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est un entier relatif forment un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$? une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}[X]$? (Justifiez vos réponses).

Si P et Q sont des polynômes dont les termes constants sont des entiers relatifs, alors les termes constants de $P+Q$, $-P$ et PQ sont aussi des entiers relatifs; de plus 0 et 1 sont bien des polynômes à terme constant entier. Ceci montre que les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est un entier relatif forment un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.

Par contre ils ne forment pas une sous-$\mathbb{R}$-algèbre, car le produit du polynôme à terme constant entier 1 par le nombre réel $\frac{1}{2}$ n'a pas un terme constant entier.

Exercice 3.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$G = \frac{16}{(X-1)^3(X+1)^3} .$$

La décomposition ne contient pas de partie entière et est de la forme

$$G = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X+1)^3} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{X+1} .$$

Comme G est paire, on a

$$G(-X) = G(X) = \frac{-a}{(X+1)^3} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X+1} + \frac{-d}{(X-1)^3} + \frac{e}{(X-1)^2} + \frac{-f}{X-1} ,$$

et donc $d=-a$, $e=b$ et $f=-c$. Il suffit de déterminer la partie polaire relative au pole 1; pour ceci on fait le changement de variable $X=1+Y$ et on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de 16 par $(1+Y+1)^3 = 8+12Y+6Y^2+Y^3$.

$$\begin{array}{llll|l}
16 & & & & 8+12Y+6Y^2+\cdots \\ \cline{5-5}
 & -24Y & -12Y^2 & +\cdots & 2-3Y+3Y^2 \\
 & & 24Y^2 & +\cdots & \\
 & & & \cdots &
\end{array}$$

On en tire $a=2$, $b=-3$, $c=3$ et en conclusion

$$G = \frac{2}{(X-1)^3} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{3}{X-1} - \frac{2}{(X+1)^3} - \frac{3}{(X+1)^2} - \frac{3}{X+1} .$$

Exercice 4.

1. *Factoriser le polynôme $Q = (1-X^2)(1-X^3)$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.*

   On a $(1-X^2) = (1-X)(1+X)$ et $(1-X^3) = (1-X)(1+X+X^2)$ avec $1+X+X^2$ irréductible sur $\mathbb{R}$. La factorisation de Q en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ est donc

   $$Q = (X-1)^2(X+1)(X^2+X+1) .$$

2. *Montrer que les polynômes* $A = (1 - X^2)(1 - X)$ *et* $B = 1 + X + X^2$ *sont premiers entre eux, et trouver deux polynômes* U *et* V *tels que* $UA + VB = 1$.

   es facteurs irréductible de A sont $X - 1$ et $X + 1$, et aucun ne divise B; donc A et B sont premiers entre eux. La division euclidienne de $A = X^3 - X^2 - X + 1$ par B donne $A = (X - 2)B + 3$, d'où

   $$1 = \frac{1}{3}\,A + \frac{-X+2}{3}\,B\ ,$$

   et on peut donc prendre $U = \frac{1}{3}$ et $V = \frac{-1}{3}\,(X - 2)$.

3. *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle*

   $$F = \frac{1}{(1 - X^2)(1 - X^3)}\ .$$

   On peut utiliser le résultat de la question précédente pour obtenir

   $$F = \frac{1}{AB} = \frac{1}{3B} - \frac{X-2}{3A} = \frac{1}{3(1 + X + X^2)} - \frac{X-2}{3(X-1)^2(X+1)}\ .$$

   Il suffit donc de calculer la décomposition en éléments simple

   $$\frac{X-2}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}\ .$$

   On trouve $a = \frac{-1}{2}$ en multipliant par $(X-1)^2$ et en faisant $X = 1$, $c = \frac{-3}{4}$ en multipliant par $X + 1$ et en faisant $X = -1$, $b = \frac{3}{4}$ en multipliant par X et en faisant tendre X vers l'infini. On peut vérifier en faisant $X = 0$, ce qui donne -2 des deux côtés. En conclusion on obtient

   $$F = \frac{1}{3(1 + X + X^2)} + \frac{1}{6(X-1)^2} - \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)}\ .$$

4. *Quel est le développement en série formelle de* $\frac{1}{1 - X^3}$ *? Pouvez-vous en déduire le coefficient de* X^{1789} *dans le développement en série formelle de* $\frac{1}{1 + X + X^2}$ *?*

   On a le développement en série formelle

   $$\frac{1}{1 - X^3} = 1 + X^3 + X^6 + \cdots + X^{3n} + \cdots = \sum_{n \geq 0} X^{3n}\ .$$

   On en déduit

   $$\frac{1}{1 + X + X^2} = \frac{1 - X}{1 - X^3} = (1 - X)\sum_{n \geq 0} X^{3n} = \sum_{n \geq 0} X^{3n} - \sum_{n \geq 0} X^{3n+1}\ .$$

   Le coefficient de $X^{1789} = X^{3 \times 596 + 1}$ dans le développement en série formelle de $\frac{1}{1 + X + X^2}$ est donc -1.

5. *Quel est le développement en série formelle de* $\dfrac{1}{(1-X)^2}$ *?*

   Le développement en série formelle de $\dfrac{1}{(1-X)^2}$ est

   $$\frac{1}{(1-X)^2} = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + (n+1)X^n + \cdots = \sum_{n\geq 0}(n+1)X^n \ .$$

   On peut retrouver ce développement en dérivant celui de $\dfrac{1}{1-X}$.

6. *Combien y a-t-il de façons différentes de dépenser* 1789 *euros en oeufs en chocolat à* 2 *euros et poules en chocolat à* 3 *euros?*

   On cherche le nombre de couples d'entiers naturels (k, ℓ) tels que $2k+3\ell = 1789$. C'est le coefficient de X^{1789} dans

   $$\left(\sum_{k\geq 0} X^{2k}\right)\left(\sum_{\ell\geq 0} X^{3\ell}\right) = \frac{1}{1-X^2} \times \frac{1}{1-X^3} = F$$
   $$= \quad \frac{1}{3(1+X+X^2)} + \frac{1}{6(1-X)^2} + \frac{1}{4(1-X)} + \frac{1}{4(1+X)} \ .$$

   Ce coefficient est, en utilisant les questions précédentes:

   $$\frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{6} \times 1790 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1788}{6} = 298 \ .$$