La Grassmannienne affine

T. Schmidt ①
12.01.2016

§ k-espaces

k corps, $\mathcal{O} = k[[t]]$, $F = k((t))$

Def 1 Un k-espace est un foncteur $F : (Sch/k)^{\circ} \to Ens = Set$

tq * F est un faisceau Zariski :

$$F(X) \to \prod_i F(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j) \quad \text{exacte}$$

pour tout rec ouvert $X = \bigcup_i U_i$

* F est un fct qui vérifie la propriété de faisceau pour les $\mathrm{spec}(R') \to \mathrm{spec}(R)$, $R \to R'$ fid. plat

On a : (a) $Sch/k \hookrightarrow k\text{-espaces}$

$$Z \longmapsto \mathrm{Hom}_k(-, Z)$$

(b) les $\varinjlim$, $\varprojlim$, quotients existent dans {k-spaces}

Def 2 Un k-space est un ind-schéma sur k si $X = \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} X_n$ avec $X_n \in Sch/k$ et $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ imm fermée.

Ex : * $R \mapsto R[[t]]$ représentable par $\prod_{i \geq 0} \mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}\, k[x_1, x_2, \ldots]$

* $R \mapsto R((t)) = R[[t]][\frac{1}{t}] = \bigcup_{N \geq 0} t^{-N} R[[t]] \subset \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{A}^1_k$

ind-schéma $/k$

$$t^{-N} R[[t]] = \left(\prod_{i \geq 0} \mathbb{A}^1_k\right) \times \mathbb{A}^N_k \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{A}^N \subset \mathbb{A}^{N+1} \text{ rep.} \\ \text{par } X_{-(N+1)} = 0 \end{cases}$$

Soit G un groupe réductif$/k$, déployé sur k

Def 3 * $LG :=$ k-espace associé (au sens de faisceau associé) au foncteur $R \mapsto G(R((t)))$

* $L^+G :=$ k-esp associé à $R \mapsto G(R[[t]])$

Prop 4 L^+G est un schéma affine $/k$
LG est un ind-schéma $/k$

Preuve : D'abord $G = GL_n$. Alors

$$GL_n(R[[t]]) = \{ A = \sum_{i \geq 0} A_i t^i, \ A_i \in Mat_n(R), \ A \text{ inversible} \}$$

donc le foncteur L^+GL_n est fermé dans $\prod_{i \geq 0} \mathbb{A}^{n^2}_k$.

De plus

$$GL_n(R((t))) = \bigcup_{N \geq 0} \underbrace{\{ A = \sum_{i \geq -N} A_i t^i, \ A_i \in Mat_n(R), A \text{ inv.} \}}_{\underset{\text{fermé}}{\subseteq} \ \prod_{i \geq 0} \mathbb{A}^{n^2} \times \mathbb{A}^N}$$

et les morphismes de transition sont fermés.

Si G est général, on prend $G \hookrightarrow GL_n$ fermé

On a alors $L^+G \underset{\text{fermé}}{\subset} L^+GL_n$ et $LG \underset{\text{fermé}}{\subset} LGL_n$ $\square$

Def 5 $Grass_G :=$ k-espace associé à $R \mapsto LG(R)/L^+G(R)$
appelé la Grassmannienne affine de G sur k

Rem : pour prop 4 on n'a pas utilisé le fait que G réductif

Prop 6 $Grass_G$ est un ind-schéma $/k$ projectif $/k$
Ici il est important que G soit réductif

§ Réseaux

Def 7 Un réseau de $R((t))^n$ est un $R[[t]]$-sous-module $\Lambda \subset R((t))^n$ tq

* Λ est un $R[[t]]$-module projectif de rang n
* $\Lambda \otimes R((t)) = R((t))^n$

Ex : $\Lambda_0 = R[[t]]^n$

<u>Lemma 8</u> : Soit $\Lambda \subset R((t))^n$ un $R[[t]]$-sous-module

LCSSE : (1) Λ est un réseau

(2) $\exists R \to R'$ fid. plat tq $\Lambda \otimes R'[[t]]$ est un $R'[[t]]$-module libre de rang n, et $\Lambda \otimes R((t)) = R((t))^n$

(3) $\exists N$: $t^N \Lambda_0 \subset \Lambda \subset t^{-N} \Lambda_0$ et $t^{-N}\Lambda_0 / \Lambda$ est R-module projectif (de rang fini)

<u>Preuve</u> (1) $\Rightarrow$ (2) on prend $g_i \in R[[t]]$ tq $\sum_i g_i = 1$ et $\Lambda \otimes R[[t]]_{g_i}$ et libre de rg n. Prenons $f_i = g_i(0)$.
Alors $\sum f_i = 1 \in R$, et $f_i \neq 0 \Rightarrow g_i \in R_{f_i}[[t]]^\times$
et dans ce cas $\Lambda \otimes R[[t]]_{g_i} \otimes R_{f_i}[[t]]$ libre de rang n
Comme $R \to \prod_i R_{f_i}$ est f.p, on a fini

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $\Lambda' = \Lambda \otimes R'[[t]]$, alors $\exists N$ tel que

$$t^N R'[[t]]^n \subset \Lambda' \subset t^{-N} R'[[t]]^n$$

Si on intersecte avec $R[[t]]^n$ on obtient $t^N R[[t]]^n \subset \Lambda \subset t^{-N} R[[t]]^n$

De plus $\left(t^{-N} R[[t]]^n / \Lambda\right) \underset{R}{\otimes} R' = t^{-N} R'[[t]]^n / \Lambda'$

car ce quotient est de type fini.

Il suffit de montrer que RHS est R'-module projectif.

On a une SE :

$$0 \to t^{-N} R'[[t]]^n / \Lambda' \to R'((t))^n / \Lambda' \to R'((t))^n / t^{-N} R'[[t]]^n \to 0$$

lui est R' module projectif

et $R'((t))^n / \Lambda' \cong \bigoplus_{j \leq -1} t^j \Lambda' / t^{j+1} \Lambda'$

$$\cong \bigoplus_{j \leq -1} \underbrace{\Lambda' / t \Lambda'}_{\cong (R')^n} \quad \text{projectif sur } R'.$$

$(3) \Rightarrow (1)$ $\quad 0 \to \Lambda \to t^{-N} R[\![t]\!]^n \to Q \to 0 \quad (S)$

$\mathcal{R}_n(R) := \{ \Lambda \subset R((t))^n$ réseaux t.q. $\cancel{t^N \Lambda_0 \subset \Lambda \subset t^{-N}\Lambda_0}$ Λ satisfait (3) $\}$

est un k-schéma projectif : on va le voir ci-dessous.

Il en découle qu'il existe $R' \subset R$ k-alg de type fini (donc noethérienne) tq la suite

$$0 \to \Lambda' \to t^{-N} R'[\![t]\!]^n \to \underset{\text{proj}/R'}{Q'} \to 0 \quad (S')$$

soit $(S') \otimes_{R'} R$.

Du fait que $t^{-N} R[\![t]\!]^n / t^N R[\![t]\!]^n = t^{-N} R[t]^n / t^N R[t]^n$,

il existe
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Lambda' & \to & t^{-N} R'[\![t]\!]^n & \to & Q' & \to & 0 \\ & & \uparrow & & & & \| & & \\ 0 & \to & \Lambda'' & \to & t^{-N} R'[t]^n & \to & Q' & \to & 0 \end{array}$$

Comme R' est noeth alors $R' \to R'[\![t]\!]$ est plat, donc $\Lambda' = \Lambda'' \otimes_{R'[t]} R'[\![t]\!]$. Il reste à prouver que Λ' est projectif sur $R'[t]$, i.e. plat sur $R'[t]$. Comme on sait qu'il est plat sur R', on conclut par le critère de platitude par fibres $\square$

Preuve prop 6 $\quad \mathcal{R} = \bigcup_{N \geq 0} \mathcal{R}_N$ est un ind-schéma projectif $/k$

$$\simeq \mathrm{Grass}_{GL_n}$$

parce que

$$V_N := t^{-N} k[\![t]\!]^n / t^N k[\![t]\!]^n$$

$\circlearrowleft t$ opérateur nilpotent $\circlearrowleft 1+t$ autom.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_N & \xhookrightarrow{\iota_N} & \mathrm{Grass}(V_N^*) \circlearrowleft 1+t \\ \downarrow \subseteq & & \downarrow \quad V_{N+1} \twoheadrightarrow V_N \\ \mathcal{R}_{N+1} & \xhookrightarrow{\iota_{N+1}} & \mathrm{Grass}(V_{N+1}^*) \circlearrowleft 1+t \end{array}$$

où $i_N(\Lambda) = t^{-N} R[\![t]\!]^n/\Lambda \in \mathrm{Grass}(V_N^*)(R)^{1+t}$

fixe sous $1+t$

On voit que l'image de i_N est composée des pts fixes de $\mathrm{Grass}(V_N^*)$ sous $1+t$, fermé dans $\mathrm{Grass}(V_N^*)$.

D'après Lm 8 (2) l'action

$$\begin{aligned} GL_n(R((t))) &\longrightarrow \mathcal{R}(R) \\ g &\longmapsto g\Lambda_0 \end{aligned}$$

est fpqc-localement transitive, avec stabilisateur $GL_n(R[\![t]\!])$.

On déduit que $LG/L^+G \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$ (pour $G = GL_n$).

Pour G réductif général, on prend $G \overset{\text{fermé}}{\hookrightarrow} GL_n$

alors GL_n/G est affine (car G réductif).

Un lm de Beilinson-Drinfeld montre que $LG/L^+G \hookrightarrow LGL_n/L^+GL_n$ est fermé. $\square$

<u>Ex</u> : $n=1$ $\mathrm{Grass}_G(R) = R((t))^\times / R[\![t]\!]^\times$

or au moins si $\mathrm{Spec}\, R$ est connexe on a

$R((t))^\times = \{ \sum_i a_i t^i : \exists i_0,\ a_{i_0} \in R^\times \text{ et } a_j \text{ nilpotent } \forall j < i_0 \}$

Alors $\mathrm{Grass}_G(R) \simeq \coprod_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{N \geq 0} \{(a_1, \dots, a_N) : a_i \text{ nilpotent}\}$

Si $k = \bar{k}$ on a $\pi_0(\mathrm{Grass}_G(k)) = \mathbb{Z}$.

pas réduit !

<u>Remarque</u> $\pi_0(\mathrm{Grass}_G) \simeq X_*(T)/\mathbb{Z}\Phi^\vee$ (on peut montrer...)

pour GL_n cela donne $= \mathbb{Z}^n/\{x = (x_i), \sum x_i = 0\} \simeq \mathbb{Z}$

<u>Remarque</u> décomposition de Cartan

si $K = G(\mathcal{O})$ alors

$$X_*(T)_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{m_n} \end{pmatrix} : \underset{\in \mathbb{Z}}{m_1 \geq m_2 \geq \cdots} \right\}$$

on a $\mathrm{Grass}_{GL_n}(k) = \coprod_{\mu \in X_{*,+}} K t^\mu K / K$

$S_\mu := \overline{K t^\mu K/K} = \bigcup_{\lambda \leq \mu} K t^\lambda K/K$ variété projective,

avec $\dim S_\mu = |\langle 2\rho, \mu\rangle|$ $\quad \rho = \frac{1}{2} \sum \alpha$, $\alpha \in \Phi^+$

Le système inductif $\{S_\mu\}$ est cofinal avec $\{\mathcal{R}_N\}$, il définit la même ind-structure.