# Géométrie algébrique parfaite 1 et 2

Matthieu Romagny, exposés du 26 janvier et du 2 février 2016

## Table des matières



## 1 Espaces algébriques

Comme le fait Xinwen Zhu, nous utiliserons le langage des espaces algébriques, parce que c'est celui qui est adapté pour traiter les problèmes de quotient en géométrie algébrique en général et dans l'article de Zhu en particulier. Dans cette section on ne donne pas de preuve.

Soit $S$ un schéma. Si $X, Y$ sont des faisceaux fppf sur $S$, on dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est *représentable* (par des schémas ; on dit parfois aussi *schématique*) si pour tout schéma $U$ et tout morphisme $U \to Y$, le produit fibré $X \times_Y U$ est représentable par un schéma.

**1.1 Exemple.** On vérifie facilement que la diagonale $\Delta : X \to X \times_S X$ d'un faisceau est représentable ssi pour tous schémas $U, V$ et tous morphismes $U \to X$, $V \to X$, le produit fibré $U \times_X V$ est représentable par un schéma.

Si $P$ est une propriété des schémas qui est stable par changement de base, on dit que $f : X \to Y$ *possède la propriété* $P$ ssi $f$ est représentable et si pour tout $U \to Y$ comme ci-dessus, le morphisme de schémas $X \times_Y U \to U$ possède la propriété $P$. Par exemple, on sait dire ce qu'est un morphisme étale et surjectif de faisceaux fppf.

**1.2 Définition.** On dit qu'un faisceau fppf $X/S$ est un *espace algébrique* si :

(1) la diagonale $\Delta : X \to X \times_S X$ est représentable, et

(2) il existe un schéma $U$ et un morphisme étale surjectif $U \to X$.

Si $X$ est un $S$-espace algébrique, un $U \to X$ comme ci-dessus est appelé un *atlas*.

**1.3 Proposition.** (1) *Si $X$ est un $S$-espace algébrique et $U \to X$ un atlas, le faisceau $R := U \times_X U$ est un schéma et les deux projections $s, t : R \rightrightarrows U$ font de $R$ une relation d'équivalence étale sur $U$ dont le quotient $U/R$ est isomorphe à $X$.*

(2) *Réciproquement, si $j = (s, t) : R \to U \times_S U$ est une relation d'équivalence étale sur un schéma $U$, le faisceau quotient $X = U/R$ est un espace algébrique.*

Pour la réciproque, le point non trivial est de montrer que sa diagonale est représentable. Utilisant cette proposition, on montre facilement que la condition (1) de la définition ci-dessus peut être omise, pourvu qu'on demande l'existence d'un morphisme $U \to X$ *représentable* étale et surjectif de source un schéma (voir [SP], 0BGQ). Par ailleurs, si on remplace $U$ par la somme disjointe des ouverts d'un recouvrement ouvert affine de $U$, on trouve :

**1.4 Définition, reformulée.** Un espace algébrique est un faisceau fppf qui possède un recouvrement au sens étale par une somme disjointe de schémas affines.

Ceci n'est rien d'autre que la définition d'un schéma, où l'on a remplacé *Zariski* par *étale*.

**1.5 Remarque.** On définit les notions d'immersion ouverte et de sous-espace ouvert. On associe à $X$ un espace annelé, mais celui-ci *ne* détermine *pas* $X$, contrairement à ce qu'il se passe pour les schémas.

**1.6 Exemple** (Deux droites, pliées). Soit $k$ un corps et $U$ la réunion de deux droites affines qui se rencontrent en un point noté 0. Il y a une involution $i$ qui échange les deux droites. L'action correspondante de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas libre au point 0, mais si on exclut ce point (i.e. si on identifie $x$ et $i(x)$ pour $x \neq 0$) on définit une relation d'équivalence étale $R$ sur $U$ et un espace algébrique $X = U/R$. Le quotient $U \to U/G = \mathbb{A}^1_k$ se factorise par un morphisme $X \to \mathbb{A}^1_k$ qui est un homéomorphisme universel. L'espace topologique $|X|$ est donc la droite affine, mais la carte étale $U \to X$ montre qu'au point (image de) 0 il y a deux directions tangentes.

**1.7 Théorème** (Gabber, [SP], 03W8)**.** *Tout espace algébrique est un faisceau fpqc.*

Ceci est non trivial mais je ne veux pas commenter pourquoi. Par ailleurs ceci est utile et on sait pourquoi : c'est parce que lorsqu'on manipule la grassmannienne affine, la plupart des recouvrements intéressants dont on dispose sont fpqc mais pas fppf.

## 2 Perfectisation d'espaces algébriques

**2.1 Frobenius.** Soit $X : (\mathrm{Sch}/\mathbb{F}_p)^\circ \to \mathrm{Ens}$ un foncteur sur les $\mathbb{F}_p$-schémas. On définit l'endomorphisme de Frobenius absolu

$$\sigma_X : X \to X, \quad \sigma_X(f) = \sigma_T^*(f) \quad \text{pour tout } f \in X(T),$$

i.e. $\sigma_X(f) = f \circ \sigma_T$ si on voit $f$ comme un morphisme $T \to X$ via Yoneda. On dit que $X$ est *parfait* si son Frobenius est un isomorphisme. Plus généralement, si $X \to S$ est un morphisme de foncteurs sur $\mathbb{F}_p$, on définit le morphisme de Frobenius relatif $\sigma_{X/S} : X \to X^{(p/S)}$ par le diagramme habituel, et on dit que $X$ est *relativement parfait sur* $S$ si $\sigma_{X/S}$ est un isomorphisme.

**2.2 Perfectisation.** On définit le *perfectisé* d'un foncteur $X$ par :

$$X^{p^{-\infty}} = \varprojlim_{\sigma} X.$$

C'est la limite projective dans la catégorie des foncteurs, définie par $X^{p^{-\infty}}(T) = \varprojlim_\sigma X(T)$ pour tout $\mathbb{F}_p$-schéma $T$. Le foncteur $X \mapsto X^{p^{-\infty}}$ est adjoint à droite de l'inclusion de la catégorie des foncteurs parfaits dans la catégorie de tous les foncteurs. On notera $\varepsilon : X^{p^{-\infty}} \to X$ l'adjonction. Si $X$ est le spectre d'un anneau $R$ alors $X^{p^{-\infty}}$ est le spectre de l'anneau $R^{p^{-\infty}} = \varinjlim_\sigma R$. Si $X$ est un schéma, alors $X^{p^{-\infty}}$ est un schéma : la représentabilité de la limite dans (Sch) ne pose pas de problème car les transitions du système projectif sont des morphismes affines. Nous verrons ci-dessous que si $X$ est un espace algébrique, alors $X^{p^{-\infty}}$ également. Avant cela, voici une remarque utile pour la suite.

**2.3 Remarque.** Soit $X_i$, $i \in I$ un système projectif de foncteurs et $X$ sa limite. Alors $\sigma_X = \varprojlim \sigma_{X_i}$. De cela il découle que la flèche canonique $\varprojlim X_i^{p^{-\infty}} \to (\varprojlim X_i)^{p^{-\infty}}$ est un isomorphisme, i.e. la perfectisation commute aux limites projectives.

**2.4 Cas des espaces algébriques.** Si $X$ est un $\mathbb{F}_p$-espace algébrique, le Frobenius $\sigma : X \to X$ est entier, radiciel et surjectif. C'est donc un homéomorphisme universel. Noter que contrairement au cas des schémas, il existe des homéomorphismes universels non séparés, comme le morphisme $X \to \mathbb{A}^1_k$ de source les deux droites pliées 1.6. De plus, Rydh a montré que pour un homéomorphisme universel d'espaces algébriques il est équivalent d'être représentable (et donc affine) ou d'être séparé ([Ry], cor. 5.22).

Dans la preuve du lemme qui suit nous utiliserons la propriété de transitivité de Frobenius pour une composition $U \to X \to Y$, qui s'exprime par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\sigma_{U/X}"] \arrow[rr, bend left, "\sigma_{U/Y}"] & U^{(p/X)} \arrow[r, "\sigma_{U/X/Y}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U^{(p/Y)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "\sigma_{X/Y}"] & X^{(p/Y)} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
& & Y \arrow[r, "\sigma"] & Y
\end{tikzcd}$$

**2.5 Lemme** ([Zhu], A.2)**.** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale de $\mathbb{F}_p$-espaces algébriques. Alors le Frobenius relatif $\sigma_{X/Y} : X \to X^{(p/Y)}$ est un isomorphisme.*

**Démonstration :** Si $X$ est un schéma, alors $X^{(p/Y)}$ également et l'argument habituel s'applique : le morphisme $\sigma_{X/Y}$ est à la fois étale et un homéo universel. En général soit $U \to X$ un atlas. D'après le cas précédent $\sigma_{U/X}$ et $\sigma_{U/Y}$ sont des isomorphismes, donc $\sigma_{U/X/Y} : U^{(p/X)} \to U^{(p/Y)}$ également. Or le diagramme ci-dessus montre que $\sigma_{U/X/Y}$ est le pullback de $\sigma_{X/Y}$ par le morphisme étale surjectif $U^{(p/Y)} \to X^{(p/Y)}$. (Ici, petite coquille dans [Zhu].) Donc $\sigma_{X/Y}$ est lui-même un isomorphisme. $\square$

**2.6 Corollaire** ([Zhu], A.3)**.** *Si $X$ est un espace algébrique, le perfectisé $X^{p^{-\infty}}$ est un espace algébrique.*

**Démonstration :** Soit $U \to X$ un atlas étale. Notons $X_n = X$ le $n$-ème objet du système projectif qui définit $X^{p^{-\infty}}$, i.e. $X^{p^{-\infty}} = \varprojlim X_n$, et idem pour $U$. D'après le lemme 2.5, on a $U \times_X X_n \simeq U_n$. En passant à la limite on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
U^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\
X^{p^{-\infty}} \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

Ceci montre que $U^{p^{-\infty}} \to X^{p^{-\infty}}$ est un atlas étale. $\square$

**2.7 Remarque.** Ce n'est pas clair qu'on puisse espérer une réciproque. En fait $X^{p^{-\infty}}$ ne voit que le sous-foncteur $X_{\mathrm{red}} \subset X$ défini par $X_{\mathrm{red}} = \cap_{n \geqslant 1} \mathrm{im}(\sigma_X^n)$. (Il est légitime de le noter $X_{\mathrm{red}}$ ; noter que hors du cas de caractéristique $p$, je ne connais pas de définition fonctorielle de $X_{\mathrm{red}}$.) Ainsi une réciproque à l'énoncé ci-dessus ne serait raisonnable que si la représentabilité de $X_{\mathrm{red}}$ entraîne celle de $X$, et ça...

**2.8 Lemme** ([Zhu], A.5)**.** *Soit $X$ un espace algébrique. On a les équivalences :*

(i) *$X^{p^{-\infty}}$ est un schéma ssi $X$ est un schéma.*

(ii) *$X^{p^{-\infty}}$ est un schéma affine ssi $X$ est un schéma affine.*

**Démonstration :** En fait ces équivalences sont valables pour n'importe quel morphisme entier et surjectif $Y \to X$ d'espaces algébriques, pas seulement pour $X^{p^{-\infty}} \to X$. Démontrons ceci. D'abord, comme un morphisme entier est affine, si $X$ est un schéma (resp. un schéma affine) alors $Y$ aussi. Réciproquement, si $Y$ est un schéma affine alors $X$ également d'après la Proposition 07VT de [SP]. Supposons que $Y$ est un schéma. Soit $x \in |X|$ un point et $y \in |Y|$ un point au-dessus. Soit $V \subset Y$ un voisinage ouvert affine et $U$ son image schématique dans $X$. On peut lire la section 082W de [SP] sur le sujet de l'image schématique, mais notez que dans le cas de $X^{p^{-\infty}} \to X$ qui est un homéomorphisme universel, on peut se contenter de prendre pour $U$ l'ouvert image de $V$. Alors $V \to U$ est entier et surjectif, donc d'après le cas déjà traité on voit que $U$ est affine. Ainsi $x$ possède un voisinage ouvert affine donc $X$ est un schéma. □

Soit $X$ un espace algébrique et $X_{\text{et}}$ son petit site étale, dont les objets sont les espaces algébriques étales sur $X$.

**2.9 Proposition** ([Zhu], A.4)**.** *Soit $X$ un espace algébrique. Alors le foncteur*

$$(U \to X) \mapsto (U^{p^{-\infty}} \to X^{p^{-\infty}})$$

*induit une équivalence de sites étales $X_{\text{et}} \simeq X_{\text{et}}^{p^{-\infty}}$ qui d'après 2.8 préserve les sous-catégories des* schémas *étales sur $X$ et $X^{p^{-\infty}}$. Cette équivalence induit un isomorphisme de topos :*

$$\varepsilon^* : \widetilde{X}_{\text{et}} \simeq \widetilde{X}_{\text{et}}^{p^{-\infty}} : \varepsilon_*.$$

**Démonstration :** Le morphisme $\varepsilon : X^{p^{-\infty}} \to X$ est un homéomorphisme universel qui est *représentable*. Avec cette propriété supplémentaire, l'invariance topologique du topos étale s'étend aux espaces algébriques, voir [SP], section 05ZG. On notera que sans cette propriété supplémentaire le résultat n'est pas connu ; par exemple on ne sait pas si le morphisme $X \to \mathbb{A}_k^1$ de 1.6 induit une équivalence de sites étales. □

**2.10 Proposition** ([Zhu], A.6, préservation des propriétés des morphismes)**.**
*Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces algébriques et $f^{p^{-\infty}} : X^{p^{-\infty}} \to Y^{p^{-\infty}}$ le perfectisé.*

(i) *Propriétés valables pour $f^{p^{-\infty}}$ si et seulement si elles le sont pour $f$ :* (1) *quasi-compact,* (2) *quasi-séparé,* (3) *séparé,* (4) *affine.*

(ii) *Propriétés valables pour $f^{p^{-\infty}}$ si elles le sont pour $f$ :* (5) *étale,* (6) *(fidèlement) plat,* (7) *fpqc.*

**Démonstration :** La commutation de la perfectisation aux produits fibrés (2.3) entraîne que la perfectisation de la diagonale est la diagonale du perfectisé.

(1) est clair et (2) découle de (1) à cause de ce qu'on vient d'écrire.

(3) Si $\Delta_{X^{p^{-\infty}}/Y^{p^{-\infty}}}$ est universellement fermé et quasi-compact, il en va de même pour $\Delta_{X/Y}$. Or, la diagonale d'un espace algébrique est un monomorphisme localement de type fini, [SP], 02X4. Donc $\Delta_{X/Y}$ est un mono propre, donc une immersion fermée, et $f$ est séparé. Le sens réciproque est facile.

(4) est 2.8. et (5) est 2.5.

(6) On part du morphisme d'adjonction $\varepsilon : (X^{p^{-\infty}}/Y^{p^{-\infty}}) \longrightarrow (X/Y)$ qui est un carré commutatif et se factorise par le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
X^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d] & X \times_Y Y^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "\text{plat}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\text{plat}"] \\
Y^{p^{-\infty}} \arrow[r, equal] & Y^{p^{-\infty}} \arrow[r] & Y.
\end{tikzcd}$$

Ici $(X \times_Y Y^{p^{-\infty}})^{p^{-\infty}} = X^{p^{-\infty}}$ d'après 2.3. On peut donc se ramener au cas où $Y$ est parfait. On peut aussi se ramener au cas où $X, Y$ sont affines donc $f$ est donné par un morphisme d'anneaux $R \to R'$. On a $(R')^{p^{-\infty}} = \varinjlim_\sigma R'$. Comme une $\varinjlim$ de $R$-modules plats est plate il suffit de montrer que

$$R \to R' \xrightarrow{\sigma^n} R'$$

est plat, or ceci est $R \xrightarrow[\sim]{\sigma^n} R \to R'$ cqfd. Le point (7) s'ensuit. $\square$

# 3 Perfectisation de torseurs

**3.1 Cadre.** Jusqu'ici nous avons considéré des schémas et espaces algébriques « absolus » sur $\mathbb{F}_p$. À partir de maintenant on travaille sur un corps de base $k/\mathbb{F}_p$ ; il faudrait donc considérer des perfectisations relatives. En fait nous supposerons $k$ parfait, c'est pourquoi les perfectisés absolus suffisent. Par ailleurs on pourrait continuer dans la catégorie ambiante des $k$-foncteurs, comme dans la section précédente, mais nous nous placerons souvent plutôt dans la sous-catégorie des $k$-faisceaux fpqc (appelés *$k$-espaces*) qui est plus géométrique. Elle est notée $\mathrm{Sp}_k$. Les produits y sont notés sans indice $k$.

**3.2 Perfectisation de groupes et torseurs.** Soit $H$ un $k$-schéma en groupes affine. Utilisant le fait que $k$ est parfait et que perfectisation et produit commutent, on voit que $H^{p^{-\infty}}$ est encore un $k$-schéma en groupes affine et $H^{p^{-\infty}} \to H$ est un morphisme de groupes.

Soit $E \to X$ un morphisme entre deux espaces. On dit que $E$ est un $H$-torseur (sous-entendu fpqc) au-dessus de $X$ si $E \to X$ est un morphisme représentable fpqc et si $E$ est muni d'une action de $H$ par $X$-automorphismes, telle que le morphisme $H \times E \to E \times_X E$ est un isomorphisme. On rappelle que tout morphisme de $H$-torseurs au-dessus de $X$ est un isomorphisme.

Dans la suite $X$ sera un espace algébrique ; il est alors formel que $E$ est également un espace algébrique (tirer en arrière un atlas de $X$). Considérons les perfectisations. D'après 2.10(7) le morphisme $E^{p^{-\infty}} \to X^{p^{-\infty}}$ est fpqc, c'est donc un $H^{p^{-\infty}}$-torseur. Le morphisme d'adjonction $\varepsilon : (E^{p^{-\infty}}/X^{p^{-\infty}}) \longrightarrow (E/X)$ se factorise par le produit fibré :

$$\begin{tikzcd}
E^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "H^{p^{-\infty}}"] \arrow[rr, bend left, "\varepsilon_E"] & E \times_X X^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \arrow[d, "H"] \\
X^{p^{-\infty}} \arrow[r, equal] & X^{p^{-\infty}} \arrow[r, "\varepsilon_X"] & X.
\end{tikzcd}$$

**3.3 Lemme** ([Zhu], A.7)**.** *Soit $E \to X$ un $H$-torseur comme ci-dessus. Supposons que deux des trois espaces algébriques $X, H, E$ sont parfaits. Alors le troisième est également parfait.*

**Démonstration :** La plus utile des trois implications est : $X$ et $H$ parfaits implique $E$ parfait.

Supposons $X$ et $H$ parfaits. Le morphisme $E^{p^{-\infty}} \to E \times_X X^{p^{-\infty}}$ ci-dessus est $(H^{p^{-\infty}}, H)$-équivariant. (Ici il semble que Zhu va un peu vite.) Si $H$ est parfait c'est donc un isomorphisme de $H$-torseurs. En particulier $E^{p^{-\infty}} \xrightarrow{\sim} E \times_X X^{p^{-\infty}}$ comme schémas, et si $X$ est parfait on trouve $E^{p^{-\infty}} \xrightarrow{\sim} E$.

Supposons $X$ et $E$ parfaits. Alors $\varepsilon_X$ et $\varepsilon_E$ sont des isomorphismes donc $E^{p^{-\infty}} \to E \times_X X^{p^{-\infty}}$ est un isomorphisme $(H^{p^{-\infty}}, H)$-équivariant de torseurs au-dessus de $X$. En choisissant un $\bar{k}$-point de $E^{p^{-\infty}}$ on en déduit que $\varepsilon_H : H^{p^{-\infty}} \to H$ est un isomorphisme après extension à $\bar{k}$, donc un isomorphisme.

Supposons $H$ et $E$ parfaits. Alors $E^{p^{-\infty}} \to E \times_X X^{p^{-\infty}}$ est un morphisme de $H$-torseurs au-dessus de $X$, donc un isomorphisme. De plus $\varepsilon_E$ est un isomorphisme, donc $E \times_X X^{p^{-\infty}} \to E$ est un isomorphisme. Par descente fpqc le long de $E \to X$, le morphisme $\varepsilon_X$ est un isomorphisme. $\square$

À partir du lemme suivant, on change un peu les notations, sans doute pour se préparer au passage aux faisceaux définis sur les anneaux parfaits.

**3.4 Lemme** ([Zhu], A.8)**.** *Soit $H'$ un $k$-schéma en groupes affine et $H = H'^{p^{-\infty}}$ son perfectisé. Supposons que est $X$ parfait. Alors le foncteur $E' \mapsto E'^{p^{-\infty}}$ est une équivalence de la catégorie des $H'$-torseurs sur $X$ vers la catégorie des $H$-torseurs sur $X$. Un quasi-inverse est donné par le produit contracté $E \mapsto E \times^H H'$.*

On donnera la preuve du lemme après 3.7.

**3.5 Remarque.** L'énoncé de Zhu est plus faible car il suppose que $H'$ est lisse. Expliquons ce qu'il se passe. Comme $k$ est parfait, le sous-schéma réduit $(H')_{\mathrm{red}}$ est un sous-groupe lisse de même perfectisé que $H'$. Le lemme affirme donc en particulier qu'on a une équivalence de catégories entre $H'$-torseurs sur $X$ et $(H')_{\mathrm{red}}$-torseurs sur $X$. Le foncteur des $H'$-torseurs vers les $(H')_{\mathrm{red}}$-torseurs est $E' \mapsto E'_{\mathrm{red}}$. Le fait qu'on ait une équivalence dit que tout $H'$-torseur est induit de son sous-torseur réduit. Par exemple si $H'$ est un groupe infinitésimal, on a $(H')_{\mathrm{red}} = 1$ et ceci dit que tout $H'$-torseur est trivial. Ce n'est pas scandaleux : la preuve montrera en effet que dans ce cas tout $H'$-torseur possède un point rationnel.

**3.6 Le produit contracté dans le cadre ensembliste.** Le produit contracté (*twisted product*) est l'analogue pour les représentations ensemblistes de l'induction pour les représentations linéaires. Pour tout groupe $H$ notons $H\text{-}\mathrm{Ens}$ la catégorie des ensembles munis d'une action de $H$. Étant donné un morphisme de groupes $\alpha : H \to H'$, on a un foncteur de *restriction* obtenu par précomposition avec $\alpha$ de l'action donnée :

$$\alpha_* : H'\text{-}\mathrm{Ens} \longrightarrow H\text{-}\mathrm{Ens}\,.$$

Bien sûr, souvent on note $Q$ au lieu de $\alpha_* Q$ puisque c'est le même ensemble sous-jacent. Ce foncteur possède un adjoint à gauche qui est le foncteur de *produit contracté* :

$$\cdot \wedge \alpha : H\text{-}\mathrm{Ens} \longrightarrow H'\text{-}\mathrm{Ens}\,.$$

Pour $P \in H\text{-}\mathrm{Ens}$ on utilise les notations $P' = P \wedge \alpha = P \times^H H'$. On construit cet objet comme le quotient de $P \times H'$ par l'action de $H$ donnée par $h.(p, h') = (hp, h'\alpha(h)^{-1})$. Il est muni de l'action de $H'$ par multiplication à gauche sur le facteur $H'$. Notons $\mathrm{cl} : P \times H' \to P \times^H H'$ l'application quotient. Voici l'unité et la counité de l'adjonction, pour $P \in H\text{-}\mathrm{Ens}$ et $Q \in H'\text{-}\mathrm{Ens}$ :

$$\begin{aligned} \eta_P : P &\longrightarrow \alpha_*(P \times^H H') \\ p &\longmapsto \mathrm{cl}(p, 1) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \varepsilon_Q : (\alpha_* Q) \times^H H' &\longrightarrow Q \\ \mathrm{cl}(q, h') &\longmapsto h'q \end{aligned}$$

Le produit contracté préserve les torseurs (si $P$ est un $H$-torseur, alors $P' = P \times^H H'$ est un $H'$-torseur) mais la restriction ne les préserve pas et c'est pourquoi il vaut mieux présenter ces foncteurs dans les catégories plus larges de $H$-ensembles.

**3.7 Le produit contracté en géométrie algébrique.** En géométrie algébrique, la question de l'existence du quotient $P \times^H H'$ est plus facile lorsque $H$ agit librement sur $P \times H'$ c'est-à-dire lorsque $\ker(\alpha)$ agit librement sur $P$. Ceci se produit dans trois cas particuliers intéressants :

(1) le cas où $\ker(\alpha) = 1$ : on parle alors d'*induction*,

(2) le cas où $H$ agit librement sur $P$, par exemple le cas des torseurs comme dans [Zhu],

(3) le cas où l'on considère le quotient au sens des champs, que Zhu évoque également.

Si $H \to \mathrm{Spec}(k)$ est fppf, le théorème d'Artin sur le quotient par un groupoïde fppf entraîne que $P \times^H H'$ est représentable par un espace algébrique, cas (2), ou un champ algébrique, cas (3). Abordons enfin la question de l'existence dans la situation particulière du lemme 3.4. On considère un torseur $E \to X$ sous un $k$-groupe $H$ affine et plat. On va construire $E \times^H H'$ par descente fpqc du $E$-schéma $H' \times E$ le long de $E \to X$. Précisément, notons $\rho$ l'action de $H$ sur $E$ et considérons le diagramme de descente :

$$H \times E \underset{\mathrm{pr}_2}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} E \longrightarrow X.$$

Une donnée de descente pour $H' \times E$ relativement à $E \to X$ est un isomorphisme

$$\rho^*(H' \times E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{pr}_2^*(H' \times E)$$

satisfaisant une condition de cocyle. C'est la même chose qu'un relèvement de l'action de $H$ à $H' \times E$, voir Mumford [MFK], chap. 1, § 3 ou Vistoli [Vi], § 3.8. L'action $h(e, h') = (he, h'h^{-1})$ fournit une telle donnée de descente. Comme la descente fpqc pour les schémas affines est effective, elle fournit un $X$-schéma $E'$ qui est le produit contracté.

**Démonstration de 3.4 :** Soit $E$ un $H$-torseur. Notons $E' = E \times^H H'$. Par 3.3 le schéma $E$ est parfait donc le morphisme d'adjonction $\eta_E : E \to E'$, $e \mapsto (e, 1)$ se factorise par le perfectisé :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "H"] & E'^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "H"] & E' \arrow[d, "H'"] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X.
\end{tikzcd}$$

Alors $E \to E'^{p^{-\infty}}$ est un morphisme de $H$-torseurs donc un isomorphisme. Maintenant soit $E'$ un $H'$-torseur. Notons $E = E'^{p^{-\infty}}$. Le morphisme $\varepsilon : E \to E'$ se factorise par le produit contracté :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r] \arrow[d, "H"] & E \times^H H' \arrow[r] \arrow[d, "H'"] & E' \arrow[d, "H'"] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X.
\end{tikzcd}$$

Alors $E \times^H H' \to E'$ est un morphisme de $H'$-torseurs donc un isomorphisme. Utilisant le fait que la perfection et le produit contracté sont fonctoriels, on conclut sans peine que ce sont des équivalences de catégories inverses comme annoncé. □

# 4 Faisceaux sur les anneaux parfaits (« espaces parfaits »)

**4.1 Définition.** Soit $\mathrm{Aff}_k^{\mathrm{pf}}$ la catégorie opposée de la catégorie des $k$-algèbres parfaites, munie de la topologie fpqc. On appelle *espace parfait* un faisceau sur ce site. On note $\mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}$ la catégorie des espaces parfaits.

Par restriction aux anneaux parfaits, on définit un foncteur $\mathrm{Sp}_k \to \mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}$ noté $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{pf}}$. Notons $\mathrm{AlgSp}_k$ la catégorie des espaces algébriques sur $k$ et $\mathrm{AlgSp}_k^{\mathrm{pf}}$ la sous-catégorie pleine des espaces algébriques parfaits. On dispose de foncteurs :

$$\mathrm{AlgSp}^{\mathrm{pf}} \hookrightarrow \mathrm{AlgSp}_k \hookrightarrow \mathrm{Sp}_k \longrightarrow \mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}.$$

**4.2 Remarques.** (1) Le foncteur $\mathrm{Sp}_k \to \mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}$ est loin d'être fidèle : par exemple la restriction aux anneaux parfaits ne permet plus de distinguer $X$ et $X_{\mathrm{red}}$.
(2) La propriété d'adjoint du perfectisé dit que $X^{\mathrm{pf}} = (X^{p^{-\infty}})^{\mathrm{pf}}$ si $X$ est un espace algébrique.

Les choix terminologiques effectués font qu'un espace algébrique, qu'il soit parfait ou non, induit un espace parfait... Ce n'est pas si grave, à cause du point crucial qui est qu'un espace algébrique parfait est déterminé par sa restriction aux anneaux parfaits. En d'autres termes :

**4.3 Lemme.** *Le foncteur* $\mathrm{AlgSp}_k^{\mathrm{pf}} \to \mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}$ *est pleinement fidèle.*

**Démonstration :** Il s'agit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{AlgSp}_k^{\mathrm{pf}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}}(X^{\mathrm{pf}},Y^{\mathrm{pf}})$ pour toute paire d'espaces algébriques parfaits $X, Y$. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ où $A$ est une $k$-algèbre parfaite, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{AlgSp}_k^{\mathrm{pf}}}(X,Y) \overset{\substack{\text{Yoneda}\\ \downarrow}}{=} Y(A) = Y^{\mathrm{pf}}(A) \overset{\substack{\text{Yoneda}\\ \downarrow}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}}(X^{\mathrm{pf}},Y^{\mathrm{pf}}).$$

Dans le cas général soit $\{U_i \to X\}$ un recouvrement étale de $X$ par des schémas affines. Pour chaque $i, j$ soit $\{V_{ijh} \to U_i \times_X U_j\}$ un recouvrement étale de $U_i \times_X U_j$ par des schémas affines. Les $U_i$ et $V_{ijh}$ sont parfaits. D'après la propriété de faisceau, un morphisme $f : X \to Y$ ou $f^{\mathrm{pf}} : X^{\mathrm{pf}} \to Y^{\mathrm{pf}}$ est uniquement déterminé par ses restrictions aux $U_i$, coïncidant sur les $V_{ijh}$. D'après le cas affine déjà traité, ces deux objets se correspondent. $\square$

**4.4 Définitions.** (1) Soit $\mathcal{F}$ un espace parfait. On dit que $\mathcal{F}$ est *(représentable par) un espace algébrique parfait* s'il est dans l'image essentielle du foncteur de 4.3.

(2) Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme d'espaces parfaits. On dit que $f$ est *représentable* si pour tout morphisme $X \to \mathcal{G}$ où $X$ est un espace algébrique parfait, le produit fibré (défini naïvement) $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} X$ est (représentable par) un espace algébrique parfait.

(3) Soit $P$ une propriété des morphismes d'espaces algébriques qui est stable par changement de base. (Zhu demande que $P$ soit étale-locale à la source et au but mais ce n'est pas utile.) Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme représentable d'espaces parfaits. On dit que $f$ possède la propriété $P$ si pour tout morphisme $X \to \mathcal{G}$ où $X$ est un espace algébrique parfait, le morphisme $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} X \to X$ possède la propriété $P$. Exemples : immersions ouvertes, fermées, morphismes étales, morphismes fpqc.

(4) On définit les torseurs dans $\mathrm{Sp}_k^{\mathrm{pf}}$ comme on l'a fait dans $\mathrm{Sp}_k$ en 3.2.

(5) Un *espace algébrique ind-parfait* est un espace parfait qui est représenté par une limite inductive d'espaces algébriques parfaits, dont les transitions sont des immersions fermées.

## Références


[MFK] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, third edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) 34, pringer-Verlag, Berlin, 1994.

[Ry] D. Rydh, *Submersions and effective descent of étale morphisms*, Bull. Soc. Math. France 138(2) (2010), 181–230.

[SP] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, located at `http://www.math.columbia.edu/algebraic_geometry/stacks-git`.

[Vi] A. Vistoli, *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, in Fundamental algebraic geometry, 1–104, Math. Surveys Monogr., 123, Amer. Math. Soc., 2005.

[Zhu] X. Zhu, *Affine Grassmannians and the geometric Satake in mixed characteristic*, http://arxiv.org/abs/1407.8519.