

Bouchage de trou
selon X. Zhu

Le 17 mai 2016
Moët-Bailly #3.

(1)

4.3. Proposition (Déperfection des actions de groupes)

Soient H un k -schéma en groupes affine (parfait) ppf opérant sur X affine ppf.

Alors il existe une déperfection $H' \times X' \rightarrow X'$ avec H'/k lisse et X'/k de type fini.

Dém: utilise:

4.3.1. Lemme (SGA3 VI_B, 11.10. bis nouvelle édition SMF)

S schéma noethérien, G un S -schéma en groupes plat et quasi-compact et séparé, \mathcal{E} un \mathcal{O}_S -module cohérent avec action de G . Alors \mathcal{E} est \varinjlim de ses sous-modules cohérents G -stables.

[Dû à Serre dans le cas S et G affines, Thomason cas général]

Dém de 4.3

$X = \text{Spec}(R)$, $H = \text{Spec}(A)$. Soit $X' = \text{Spec}(R')$ et $H' = \text{Spec}(A')$

des déperfections. Notons l'action:
$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes_k R \\ \cup & & \\ R' & & \end{array}$$

Soit $M' \subset R'$ un sous- k -EV de dim finie qui engendre R' comme algèbre. D'après 4.3.1, il existe $W \subset R$ de dim finie sur k , contenant M' et stable par H .

Alors Δ induit $W \rightarrow A \otimes_k W$

Pour $q = p^n \gg 0$, on a $W \subset (R')^{1/q}$

et $\Delta(W) \subset (A')^{1/q} \otimes W$

Notons R'' la k -algèbre engendrée par w dans R .
 Alors $R' \subset R'' \subset R'^{1/q}$ donc $R'' \overset{\infty}{P} = R$ et R'' de type fini sur k .

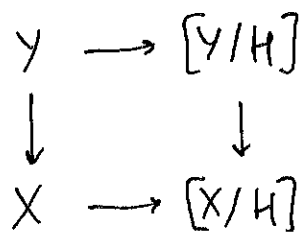
De plus $\Delta(R'') \subset A'^{1/q} \otimes R''$ donc on peut prendre
 $H' = \text{spec}(A')^{1/q}$ et $X' = \text{spec}(R'')$ \square

4.4. Proposition Soit H opérant sur X comme dans 4.3.
 (*remplacer "affine" par "admettant une déperfection"?)
 On suppose que l'action est libre : $H \times X \rightarrow X \times X$ mono.
 Alors le faisceau \mathcal{F}_{qc} quotient $[X/H]$ est (représentable par) un espace algébrique parfait ppf, qui est séparé si l'action est propre.

4.4.1. Lemme Soit Y un espace algébrique ppf et
 $Y \rightarrow X$ étale, H -équivariant, tel que $[Y/H]$ est représentable
 Alors $[X/H]$ est également représentable. (et réciproquement)
 (Noter que $H \curvearrowright X$ librement $\rightarrow H \curvearrowright Y$ librement aussi)

Dev $Y \rightarrow Y/H$ est un H -torseur donc localement trivial pour la top. étale. D'après le sens réciproque, on peut supposer que $Y \rightarrow [Y/H]$ a une section.

Dans le diagramme suivant de faisceaux:



Ce carré est cartésien car flèches horiz. = toseurs.

les flèches du carré sont des épi de faisceaux fpqc.

Notons $U = [Y/H]$ qui est un espace algébrique par hypothèse, et $R = U \times_{[X/H]} U \hookrightarrow U \times_k U$

Il suffit de voir que (a) R est un espace algébrique
(b) $pr_1: R \rightarrow U$ est étale.

En fait (a) \rightarrow (b) via descente fpqc de $Y \rightarrow U$.

Reste (a). Ici R est un sous-faisceau de $U \times_k U$ dont l'image réciproque dans $Y \times_k Y$ est

$R_Y := Y \times_{[X/H]} Y$. Contemplons le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y \times_k Y & \longrightarrow & U \times_k U & \longrightarrow & [X/H] \times [X/H] \\
 \uparrow & \square & \uparrow & \square & \uparrow \text{diag.} \\
 R_Y & \longrightarrow & R & \longrightarrow & [X/H]
 \end{array}$$

Là : "pour ceux qui prennent des notes, tant pis" et le diagramme est transformé sauvagement en

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y \times_k Y & \xrightarrow{\exists \text{ section}} & X \times_k X & \longrightarrow & [X/H] \times [X/H] \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{diag} \\
 R_Y & \longrightarrow & X \times_{[X/H]} X & \longrightarrow & [X/H]
 \end{array}$$

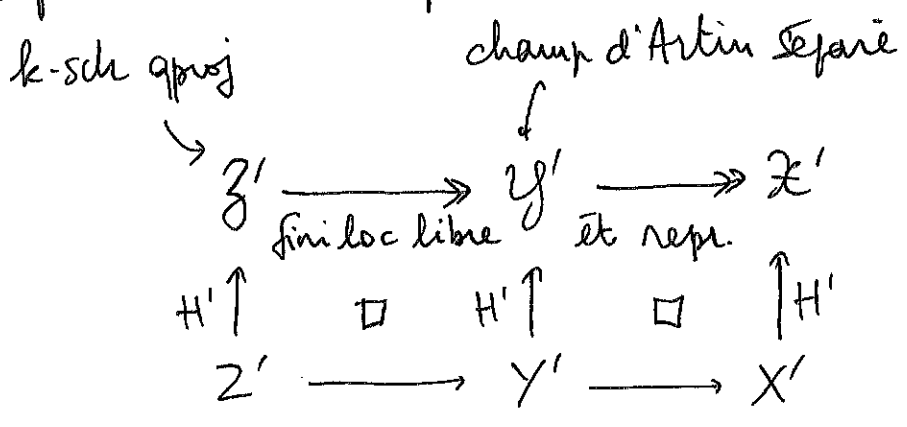
Suffit de voir que R_Y est un espace alg; on le voit... \square

Dém de 4.4, suite. On fixe une déperfection $H' \times X' \rightarrow X'$.

\triangle Elle n'est pas nécess. libre (alors que la perfectisée est libre).

Le morphisme $H' \times X' \rightarrow X' \times X'$ devient mono
après perfectisation donc il est quasi-fini et
radiciel. On considère le champ quotient $[X'/H'] =: \mathcal{X}'$
C'est un champ d'Artin à diagonale quasi-finie.

D'après Keel-Mori (cf Conrad, Lem 2.2) il existe des
morphisms de champs :



Z' quasi-proj $\Rightarrow Z'$ aussi (en tout cas si H' affine)

D'après 4.4.1, il suffit de voir que Y/H est représentable
(avec $Y = Y' \mathbb{P}^{\infty}$).

4.4.2 lemme (A.10 dans la dernière version de Zhu)

Soit $V \ni U$ un k -espace algébrique en groupoïdes plat

Alors $[U \mathbb{P}^{\infty} / V \mathbb{P}^{\infty}]^{pf} \simeq [U/V]^{pf}$

(où $(-)^{pf}$ désigne la restriction aux k -alg. parfaites),

~~et~~ i.e. $[U \mathbb{P}^{\infty} / V \mathbb{P}^{\infty}](R) \simeq [U/V](R) \quad \forall R/k \text{ parfaite}$

Dem: formelle utilisant le fait que $R \mapsto R \mathbb{P}^{\infty}$
préserve la platitude \square

En conséquence de ce lemme, $[Y/H] = \mathcal{Y}' \text{ pf}$

(5)

↑

c'est à la fois le faisceau quotient et le champ quotient

\mathcal{Y}' est aussi le champ quotient de \mathcal{Z}' (qproj) par le groupoïde $\mathcal{Z}' \times_{\mathcal{Y}'} \mathcal{Z}' \rightrightarrows \mathcal{Z}'$ fini loc. libre.

De plus le perfectisé $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{Z} \rightrightarrows \mathcal{Z}$ est une relation d'équivalence parce que $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}' \text{ pf}$ est un faisceau.

4.5. Théorème (A.29 dans Zhu)

Soit $V \rightrightarrows U$ une relation d'équivalence avec U, V des k -schémas ppf. On suppose que $V \rightrightarrows U$ est perfectisé d'un groupoïde $V' \rightrightarrows U'$ fini loc. libre avec V', U' quasi-projectifs sur k .

Alors $[U/V]$ est un k -schéma ppf.

Dém On se ramène à $U' = \text{spec } A$ et $V' = \text{spec } B$ en utilisant l'hypothèse quasi-projective.

On pose $C = \ker(A \rightrightarrows B)$, on a $CP^{-\infty} = \ker(A^{P^{-\infty}} \rightrightarrows B^{P^{-\infty}})$.

On va montrer que $[U/V] \rightarrow \text{spec } CP^{-\infty}$ est un iso.

$$\begin{array}{ccc} V \rightrightarrows U & \rightarrow & X = \text{spec } CP^{-\infty} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ V' \rightrightarrows U' & \rightarrow & X' = \text{spec } C \end{array}$$

Pour cela on mq (a) $V \rightarrow U \times_X U$ est un isom.

(b) $U \rightarrow X$ est fidèlement plat

Ces deux assertions suffisent car

⑥

(a) implique que $[U/V] \rightarrow X$ est un mono } de faisceaux
(b) ————— " ————— épi }

Alors-y. Comme $V' \rightrightarrows U'$ est fini localement libre,

on sait par SGA3 V th 4.7 que

$U' \rightarrow X'$ fini surjectif $\Rightarrow U \rightarrow X$ entier surjectif

$V' \rightarrow U' \times_{X'} U'$ fini surjectif $\Rightarrow V \rightarrow U \times_X U$ entier surjectif

Comme $V \rightarrow U \times_X U \rightarrow U \times_{\mathbb{Z}} U$ est un mono, alors

$V \rightarrow U \times_X U$ est un mono. entier surjectif entre

schémas réduits donc un iso

Reste à voir que $\mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{A}P^\infty$ est plat.

Or par le changement de base $\mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{A}P^\infty$, on

trouve $\mathbb{A}P^\infty \rightarrow \mathbb{B}P^\infty$ qui est plat (perfectisé de $A \rightarrow B$).
fini loc. libre

4.5.2. Lemme (A.30)

$f: R \rightarrow S$ morphisme injectif d'anneaux parfaits
perfectisé d'un morphisme fini. Alors f descend
la platitude : si $M \otimes_R S$ est S -plat alors M est R -plat

Dém Il suffit de le montrer pour $R_1 \rightarrow R_1 \otimes_R S$

où $R \rightarrow R_1$ est fidèlement plat (immédiat).

Soit $R' \rightarrow S'$ fini qui défectivise $R \rightarrow S$.

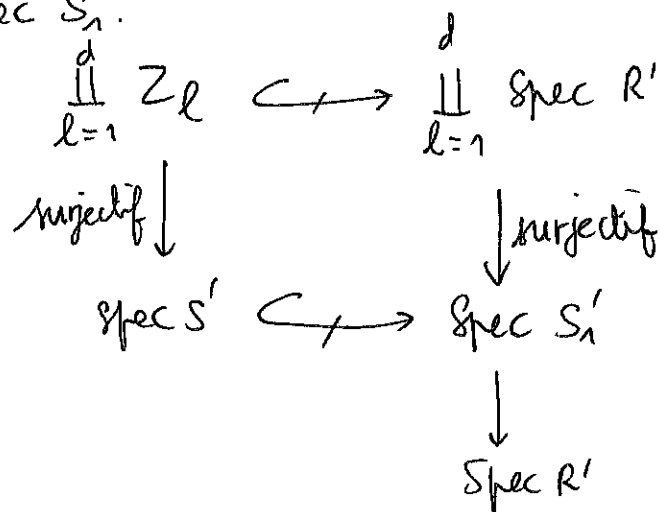
On peut écrire S' comme un quotient de

$$S'_1 := R'[X_1, \dots, X_n] / (P_1(X_1), \dots, P_n(X_n))$$

avec $P_i \in R'[X]$ unitaire (pol. en 1 variable).

Par extension fidèlement plate $R' \rightarrow R''$ on peut supposer les P_i décomposés: $P_i(X) = \prod_{j=1}^{d_i} (X - a_{ij})$ $a_{ij} \in R''$

Alors $\text{Spec } S'_1 \rightarrow \text{Spec } R'$ admet $d = \sum d_i$ sections, qui recouvrent $\text{Spec } S'_1$.



On passe aux perfectisés :

$$\coprod_{l=1}^d Z_l^{p^{-\infty}} \rightarrow \text{Spec } S \rightarrow \text{Spec } R$$

où Z_l est un certain sous schéma fermé de $\text{Spec } R$.

Sur les anneaux: $R \rightarrow S \rightarrow \prod_{l=1}^d R/J_l$

noyau nilpotent, or S réduit (car parfait)

donc $\bigcap J_l = 0$. Alors :

4.5.3 Lemme (SP, Tag 0522) R anneau, J_1, \dots, J_m idéaux.

Si $\bigcap J_i = 0$ alors $R \rightarrow \prod R/J_i$ descend la platitude \square