Déperfection de schémas en groupes et de torseurs

Laurent Moret-Bailly 23 fév 2016

§3. Morphismes parfaitement propres / lisses ; grassmanniennes parfaites

3.1. Propreté parfaite

Prop $f : X' \to Y'$ morphisme de k-esp. alg de type fini.
Sont équivalentes :

(1) f est propre

(2) $f^{p^{-\infty}} : X = X'^{p^{-\infty}} \to Y = Y'^{p^{-\infty}}$ est séparé et univ. fermé

Dém Clair car $X \to X'$ homéo universel ⊠

Déf : soit $f : X \to Y$ morphisme de k-esp. alg (parfaits et) ppf
Alors f est dit parfaitement propre si l'une des conditions équiv. suivantes est vérifiée :

(1) f est séparé et univ. fermé

(2) f est le perfectisé d'un morphisme propre

Prop f est parfaitement propre ssi f vérifie le critère valuatif de propreté restreint aux anneaux de valuation parfaits.

Dém facile ; noter que si R est un anneau de val de car $p > 0$ alors $R^{p^{-\infty}}$ est un anneau de val ⊠

3.2. Grassmanniennes parfaites

Prop X un esp. alg parfait ppf, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module loc. libre de type fini sur X. Alors l'espace parfait, pour $i \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\left(\operatorname{Spec} R \xrightarrow{f} X \right) \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{quotients de } f^*\mathcal{E} \\ \text{loc libres de rang } i \end{array} \right\}$$

est représentable par un esp. alg parfait noté $Gr^{p^{-\infty}}(i, \mathcal{E})$. Si X est ppf, alors $Gr^{p^{-\infty}}(i, \mathcal{E})$ est ppf, et parfaitement propre sur X.

Dém : prendre $Gr(i, \mathcal{E})^{p^{-\infty}}$ ⊠

3.3. Lissité parfaite

Déf Soit $f : X \to Y$ morphisme d'esp. alg ppf. On dit que f est parfaitement lisse s'il existe un diagramme commutatif, localement Zariski sur X :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{étale}} & Y \times (\mathbb{A}^n)^{p^{-\infty}} \\ {\scriptstyle \text{étale}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle pr_1} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

§4. Déperfection de schémas en groupes

4.1. Théorème Soit H un k-schéma en groupes ppf (et séparé mais cf SGA3, VI_B, §5). Alors il existe un k-groupe algébrique lisse H_0 tel que $H = H_0^{p^{-\infty}}$

Rem « lisse » est gratuit quitte à prendre $(H_0)_{red}$.

Dém Réduction au cas alg. clos (rappel : $\bar{k} = k^s$) : si H_s' est une déperfection de $H_s = H \otimes_k k^s$, elle provient de H_K' sur un K/k fini étale. Sur $H_K'^{p^{-\infty}}$ on a une donnée de descente pour K/k (étale) ; elle provient d'une donnée de descente sur H_K'.

On suppose maintenant $k = \bar{k}$. Voici l'argument de Serre (Groupes proalgébriques).

Comme schéma, $H = \coprod_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$, $\Gamma = H/H^0$ gpe fini,

où H_γ est irréductible de corps de fonctions K_γ.

On note $K = \prod_{\gamma\in\Gamma} K_\gamma$ l'anneau des fonctions rationnelles

sur H. On fixe une déperfection $H' = \coprod_{\gamma\in\Gamma} H'_\gamma$

avec H'_γ intègre, de type fini sur k, de corps de

fonctions $K'_\gamma \subset K_\gamma$. On note $K' = \prod_\gamma K'_\gamma$

(NB : on a $H_\gamma \simeq H_0$ pour tout γ ; on peut prendre

$H'_\gamma = H'_0$ pour tout γ si on veut)

Remarque : $H(k) \longrightarrow H'(k)$ est bijective.

Notons $\Theta : H \times H \longrightarrow H$, $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.

Pour $n \gg 0$, Θ induit un morphisme $(H' \times H')^{p^{-n}} \longrightarrow H'$

et on fixe un tel n, et $q := p^n$.

Pour $g \in H(k)$, la translation à droite $(x \mapsto xg)$ induit

$H'^{1/q} \longrightarrow H'$ et $K' \xrightarrow{t_g} K'^{1/q}$

Soit $K'' \subset K'^{1/q}$ sous-anneau engendré par les $t_g(K')$,

pour $g \in H(k)$ variable. C'est une K'-algèbre finie,

invariante par les t_g, de la forme $\prod_\gamma K''_\gamma$

Pour déperfectiser, on prend

$$H'' = \text{normalisé de } H' \text{ dans } K''.$$

C'est un k-schéma de type fini (fini radiciel sur H').

Il suffit de voir que Θ induit un morphisme

$$H'' \times H'' \longrightarrow H'',$$

et même que $\theta^\#: K \longrightarrow K \otimes K$

envoie K'' dans $K''\otimes K''$, ou K''_γ dans $\prod_{\alpha\beta^{-1}=\gamma} K''_\alpha \otimes K''_\beta$.

On fixe α et β tels que $\alpha\beta^{-1}=\gamma$.

On dispose d'un $\theta^\#_{\alpha,\beta} : K_{\alpha\beta^{-1}} \longrightarrow K_\alpha \otimes K_\beta$, qui

envoie $K''_{\alpha\beta^{-1}}$ dans $(K''_\alpha \otimes K''_\beta)^{1/q}$. Il correspond à

$$\begin{aligned} H_\alpha \times H_\beta &\longrightarrow H_{\alpha\beta^{-1}} \\ (x,y) &\longmapsto xy^{-1}. \end{aligned}$$

On voudrait que ça tombe en fait dans $K''_\alpha \otimes K''_\beta$.

Soit $f \in K''_{\alpha\beta^{-1}}$, une fonction rationnelle sur $H''_{\alpha\beta^{-1}}$

et aussi sur $H_{\alpha\beta^{-1}}$. Pour $x \in H_\alpha$, $y \in H_\beta$ on peut

écrire $f(xy^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)^{1/q}\, b_i(y)^{1/q}$, $a_i \in K''_\alpha$, $b_i \in K''_\beta$

On peut supp. m minimal donc les b_i lin. indépendants

sur k. Alors il existe $y_1, \dots, y_m \in H_\beta(k)$ tels que

les $c_{ij} \overset{\text{def}}{=} b_i(y_j) \in k$ sont définis <u>et</u> $\det(c_{ij}) \neq 0$.

Le système $(j = 1, \dots m)$

$$\underbrace{f(xy_j^{-1})}_{\substack{\in K''_\alpha \\ \text{par invariance} \\ \text{par translation}}} = \sum \underbrace{a_i(x)^{1/q}}_{\in {K''_\alpha}^{1/q}} \underbrace{c_{ij}^{1/q}}_{\in k}$$

est de Cramer sur K''_α donc $a_i(x)^{1/q} \in K''_\alpha$, $\forall i$.

De même avec les $b_i(y)$. $\boxtimes$

4.2. Corollaire H comme dans 4.1.
Tout H-torseur sur un espace algébrique parfait (lppf) est localement trivial pour la topologie étale. ⊠

4.3. Prop Soit H un k-schéma en groupes affine, parfait, ppf, opérant sur un schéma ppf X. Alors il existe une déperfection $H' \times X' \to X'$.

Preuve ? C'est pas OK dans Zhu.

4.4. Prop H et X comme en 4.3. Admettons qu'il existe une déperfection $H' \times X' \to X'$. On suppose l'action libre, i.e. $H \times X \xrightarrow{(*)} X \times X$ est un monomorphisme.

$$(g, x) \longmapsto (gx, x)$$

Alors le faisceau quotient $[X/H]$ est représentable par un espace algébrique ppf X/H. Si X est séparé et si l'action est propre (i.e. $(*)$ immersion fermée) alors X/H est séparé.