Espaces algébriques parfaitement de présentation finie

L. Moret-Bailly 9 fév 2016

§ 1. Définitions

k parfait, car $= p > 0$.

X espace algébrique parfait sur k.

Déf : X est p.p.f. ssi il est qc & qs, et il existe un atlas étale $(U_i \to X)_{i \in I}$ avec $U_i = U_i'^{p^{-\infty}}$, U_i' affine TF / k.

§ 2 Déperfection

Th 1 Soit X un k-esp. alg parfait. Alors X est ppf ssi il existe X' un k-esp alg de prés finie tq $X \simeq X'^{p^{-\infty}}$.

Dém $\Leftarrow$ clair

$\Rightarrow$ Remarque : OPS X' réduit et on le fera systématiquement

Lm 1 le th 1 est vrai si X est un schéma affine.

Dém : $X = \mathrm{Spec}(A)$, avec A une k-alg parfaite. Par hypothèse il existe $A \to B$ fidèlement plat et étale, et $B' \subset B$ réduit et TF / k tq $B = B'^{p^{-\infty}}$. Comme $A \to B$ est pf / k, il existe $A_0 \to B_0$ de TF / k, étale et fid. plat, avec $A_0 \subset A$ et A_0, B_0 TF / k. (On écrit A comme $\bigcup$ de ses sous-k-alg de type fini.) tels que $B \simeq B_0 \otimes_{A_0} A$.

On a $B = \varinjlim_{\substack{A_0 \subset A_1 \subset A \\ A_1 \text{ t.f} / k}} B_0 \otimes_{A_0} A_1$, donc OPS $B' \subset B_0$.

On a un diagramme, sur la page suivante :

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{ét}"'] & A_0^{p^{-\infty}} \arrow[r, hook, "(A\text{ parfait})", "i"'] \arrow[d, "\text{ét}"'] & A \arrow[d, "\text{ét}"'] \\ B' \arrow[r, hook] & B_0 \arrow[r, hook] & B_0^{p^{-\infty}} \arrow[r, hook, "j"'] & B = B'^{p^{-\infty}} \end{tikzcd}$$

le 1er carré est cocartésien car $A_0 \to B_0$ étale
le rectangle ext est cocart par hyp
donc le 2nd carré est aussi cocartésien
Or B = perfectisé de B', donc aussi de B_0, i.e. j isom.
Par descente i est un isom, donc $A = A_0^{p^{-\infty}}$ cqfd.

<u>Rem</u> pour les schémas, les versions étale et Zariski de «ppf» sont donc équivalentes.

<u>Th 1 bis</u> Même X. Soit $U \hookrightarrow X$ ouvert schém. dense, U' un k-esp alg réduit de prés. finie; $U \xrightarrow{\sim} U'^{p^{-\infty}}$.
Alors il existe X' de prés. finie $/k$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varepsilon_U"'] & X \arrow[d, "\varepsilon_X"'] \arrow[r, "\simeq"] & X'^{p^{-\infty}} \arrow[dl] \\ U' \arrow[r, hook] & X' & \end{tikzcd}$$

<u>Lm 2</u> Le th 1bis est vrai si X est un schéma.

<u>Dém</u> On a $\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & X \\ U' & \end{tikzcd}$. On définit X' comme un espace annelé: on pose $\begin{cases} |X'| = |X| \\ \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X \cap j_* \mathcal{O}_{U'} \end{cases}$

l'intersection étant prise dans $j_* \mathcal{O}_U$.

À montrer : $\begin{cases} (|X'|, \mathcal{O}_{X'}) \text{ est un schéma t.f } / k \\ \mathcal{O}_{X'}^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}_X \quad (\text{ça c'est immédiat}) \end{cases}$

C'est une question Zariski-locale, donc OPS X affine.
Donc $X = X''^{p^{-\infty}}$ avec X'' de t.f sur k.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d] & X = \mathrm{Spec}\, A \arrow[d] \\ U' & X'' = \mathrm{Spec}\, A'' \end{tikzcd}$$

A'' est t.f sur k donc $\forall m \gg 0$, $A''^{p^m} \subset \Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})$
donc $\subset \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$. Donc quitte à changer A'' en A''^{p^m}
on a le diagramme comm. de k-schémas :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & X \arrow[dd, "\varepsilon"] \\ U' \arrow[d, "\varepsilon''"'] & \\ U'' \arrow[r, hook, "j"] & X'' \end{tikzcd}$$

en colonnes, les espaces sous jacents sont les mêmes ! donc $\varepsilon_* = \mathrm{id}$

Les faisceaux $(\varepsilon_*)\mathcal{O}_X$, $j_*\mathcal{O}_{U}$, $j_*\mathcal{O}_{U'}$ sont des $\mathcal{O}_{X''}$-algèbres quasi-cohérentes donc $\mathcal{O}_{X'}$ aussi, avec

$$\mathcal{O}_{X''} \subset \mathcal{O}_{X'} \subset \mathcal{O}_{X''}^{p^{-\infty}} = \mathcal{O}_X.$$

Donc $X' = \underline{\mathrm{Spec}}_{X''}\, \mathcal{O}_{X'}$ est un schéma et $X = X'^{p^{-\infty}}$.
De plus $\mathcal{O}_{X'}$ est inclus dans la fermeture intégrale (radicielle en fait) de $\mathcal{O}_{X''}$ dans $j_*\mathcal{O}_{U'}$ qui est une $\mathcal{O}_{X''}$-algèbre finie. Donc X'/k est de type fini ⊠

On sort l'artillerie

Prop (Gruson-Raynaud) Soit X espace algébrique qcqs.
Alors il existe une suite d'ouverts quasi-compacts

$$X = U_n \supset U_{n-1} \supset \dots \supset U_0 = \emptyset \quad , \quad Z_i := U_i \setminus U_{i-1} ,$$

et des recouvrements étales $\varphi_i : V_i \to U_i$ avec :

$$\begin{cases} V_i \text{ schéma qcqs (affine si on veut)} \\ \varphi_i^{-1}(Z_i) \xrightarrow{\sim} Z_i \end{cases}$$

Dém cf [GR] ☒

Dém du th 1 bis. Par récurrence, on suppose trouvée une déperfection de U_i compatible avec
$$\begin{matrix} U \cap U_i \\ \downarrow \\ U'_{|U \cap U_i|} \end{matrix}$$
, notée U_i'.

On veut l'étendre à U_{i+1}.
On remplace X par U_{i+1}, et
U par $U \cap U_{i+1}$ etc. Alors $Z_{i+1} = X \setminus U_i$ est fermé.
On peut recoller U_i' et U' en une déperfection de $U \cup U_i$.
On remplace U et U_i par $U \cup U_i$. On arrive à la situation :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[r, hook] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \overset{(ex\text{-}V_{i+1})}{\overset{\parallel}{V}} \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\
W' \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[r, hook] \arrow[dl] & X & Z \arrow[l, hook'] \\
V' & & &
\end{tikzcd}$$

condition de [GR]

où W' provient de $U'_{et} \simeq U'^{p^{-\infty}}_{et} = U^{f}_{et}$

le cas des schémas (acquis) fournit une déperfection V' de V, compatible avec $W \to W'$.
On cherche une rel. d'équivalence étale R' sur V',

qui déperfectise $R = V \times_X V$ et prolonge $W' \times_{U'} W'$.

Au-dessus de Z, R est triviale i.e. la diagonale.

On a un diagramme qui est cartésien et cocartésien :

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & V \arrow[d, hook] \\
W \times_U W \arrow[r, hook] & V \times_X V = R
\end{tikzcd}$$

Dans la déperfection $V' \times_k V'$, on dispose de V' et $W' \times_{U'} W'$ et leur intersection est un ouvert. On définit R' comme leur recollement i.e leur réunion (le long d'un ouvert commun). ☒

Prop Déperfection des morphismes.

Si $f : X \to Y$ mor. d'esp-alg ppf alors $\exists f' : X' \to Y'$ déperfection

<u>Dém</u> :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
X' \arrow[r, dashed, "\exists ?"] & Y'
\end{tikzcd}
\iff
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & X' \times_k Y' \arrow[dl] \\
X' \arrow[ur, dashed, "?"] &
\end{tikzcd}$$

Or $X \to X'$ est lim des $X'^{p^{-n}}/X'$ et $X' \times_k Y' \to X'$ est PF.

Donc $\mathrm{Hom}_{X'}(X, X' \times Y') = \varinjlim_n \mathrm{Hom}(X'^{p^{-n}}, X' \times Y')$

par EGA IV §8 pour les esp-alg. ☒