Matthieu Romagny II

§3. Perfectisation de torseurs

Cadre k parfait, $p = \mathrm{char}(k)$

Sp_k = faisceau fpqc / k
"espaces"

$\exists \quad X^{(p^{-\infty}/k)} \xrightarrow{\cong} X^{p^{-\infty}}$ où $X^{(p^{-\infty}/k)} = \varprojlim_{\sigma} X^{(p^{-n}/k)}$

iso si k est parfait

Torseurs H = un k-groupe ~~alg/k~~ affine

$(H \times_{\mathrm{Spec}\,k} H)^{p^{-\infty}} = H^{p^{-\infty}} \times_{\mathrm{Spec}\,k} H^{p^{-\infty}} \rightsquigarrow H^{p^{-\infty}}$ un k-groupe

et $\varepsilon_H : H^{p^{-\infty}} \longrightarrow H$ est un morphisme.

~~Soit X un espace.~~

Def : Un H-torseur sur X est un espace E avec un morphisme $E \longrightarrow X$, repr. et fpqc, muni d'une action de H par X-automorphisme tq. la flèche $H \times E \longrightarrow E \times_X E$ est un iso

$$(h, e) \longmapsto (e, he)$$

Rem : Si X est un espace alg., alors E aussi

$$\begin{tikzcd} E \times_X \mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d, "\text{repr et surj.}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{U} \arrow[d, "\text{repr et surj.}"] \\ E \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Si $E \longrightarrow X$ est un H-torseur, alors $E^{p^{-\infty}} \longrightarrow X^{p^{-\infty}}$ est encore fpqc et devient un $H^{p^{-\infty}}$-torseur.

$$\begin{tikzcd} E^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "H^{p^{-\infty}}"'] & E \times_X X^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "H"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \arrow[d, "H"] \\ X^{p^{-\infty}} \arrow[r, equal] & X^{p^{-\infty}} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

"pas le faisceau vide."

<u>Lemma</u> : Soit H, $E \xrightarrow{H} X$ comme ci-dessus, non-vide.

Si deux des trois sont parfait, le 3^e aussi.

<u>Dém</u> : H, X parfaits $\Rightarrow E$ aussi.

$$E^{p^{-\infty}} \longrightarrow E \times_X X^{p^{-\infty}} \longrightarrow E$$

iso si H parfait — iso si X parfait

A partir de maintenant les perfectisés s'appellent H et ceux dont ils sont perfectisés : H'

<u>Lemma</u> : H' un k-groupe affine, X parfait

$H = H'^{p^{-\infty}}$ son perfectisé.

Alors $E' \longrightarrow E'^{p^{-\infty}}$ est une equivalence de cat. des H'-torseurs $/X$ avec la cat. des H-torseurs $/X$.

Un quasi-inverse est donné par le produit contracté $E \longmapsto E \times^H H'$

$$\begin{bmatrix} h.(e, h') \\ = (he, h'h^{-1}) \end{bmatrix}$$

<u>Rem</u> : $(H'_{red})^{p^{-\infty}} = (H')^{p^{-\infty}}$ donc $H'\text{-tors} \xrightarrow{\simeq} H'_{red}\text{-tors}$

$$E' \longmapsto E'_{red}$$

<u>Rappel</u> : produit contracté

- Ensembliste

H-Ens : cat. des H-ensembles

Si $\alpha : H \to H'$ est un morphisme de groupes, on a

$$\alpha_* : H'\text{-Ens} \longrightarrow H\text{-Ens}$$
$$E' \longmapsto \alpha_* E'$$

Le produit contracté est adjoint à gauche

$$\cdot \times^H H' : H\text{-Ens} \longrightarrow H'\text{-Ens}$$

tq. $\mathrm{Hom}_H(P, \alpha_* Q) = \mathrm{Hom}_{H'}(P \times^H H', Q)$ $\qquad P \in H\text{-Ens}$, $Q \in H'\text{-Ens}$

Unité : $\eta_P : P \longrightarrow \alpha_*(P \times^H H')$

$$x \longmapsto (x, 1)$$

Counité $\varepsilon_Q : (\alpha_* Q) \times^H H' \longrightarrow Q$

$$(y, h') \longmapsto h'y$$

<u>Rem</u> : $\times^H H'$ préserve les torseurs (α_* pas en général !)

• Existence en géo alg : $\alpha : H \longrightarrow H'$

L'action de H sur $E \times H'$ est libre

ssi $\ker(\alpha)$ agit librement sur P

<u>Ex</u> (1) $\ker(\alpha) = 1$: "induction"

(2) P = un H-torseur

(3) Si on prend le quotient au sens des champs.

~~X/k un espace alg.~~

Si H/k est un groupe fppf (= de type fini) dans le cas (2)

un thm. d'Artin affirme l'existence du quotient d'une rel. d'équiv.

fppf $\left(H \times P \overset{fppf}{\underset{fppf}{\rightrightarrows}} P\right)$, $H \times P \hookrightarrow P \times_k P$

comme espace algébrique sur k.

Dans le context du lemme, H est seulement affine (donc fpqc)

On montre l'existence de $E \times^H H'$ comme k-schéma*, comme suit :

$$
\begin{tikzcd}
 & E \times H' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & E \times^H H' \arrow[d] \\
H \times E \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E \arrow[r, "fpqc"'] & X
\end{tikzcd}
$$

*(si E un k-schéma, sinon comme k-espace alg.)

La donné d'une donné de descente sur $E \times H'/E$ relativement à $E \longrightarrow X$ est la même chose qu'un relèvement de l'action de H à $E \times H'$. L'action "antidiagonal" fournit une telle donné

Descente effective des schémas quasi-affines par un mor. fpqc (S6A1)

Dém : X parfait, $H = H'^{p^{-\infty}}$. Soit E un H-torseur. Alors, E est parfait

~~...~~ Le morphisme $\eta_E : E \longrightarrow E' := E \times^H H'$

$x \longmapsto (x, 1)$

se factorise :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "H"'] & (E')^{p^{-\infty}} \arrow[r] \arrow[d, "H"'] & E' \arrow[d, "H'"] \\ X \arrow[r, phantom, "="] & X \arrow[r, phantom, "="] & X \end{tikzcd}$$

~~...~~:

Soit E' un H'-torseur et $E = (E')^{p^{-\infty}}$

Alors $\varepsilon_H : E \longrightarrow E'$ se factorise :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & E \times^H H' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "H'"'] & E' \arrow[d, "H'"] \\ X \arrow[r, phantom, "="] & X \arrow[r, phantom, "="] & X \end{tikzcd}$$

□

§ 4 Faisceaux sur les anneaux parfaits

Déf : Aff_k^p := cat. opposé de la cat. des k-alg. parfait, muni de fpqc

On appelle espace parfait un faisceau sur ce site

$\rightsquigarrow Sp_k^{pf}$,

On a des foncteurs :

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^{pf}$$

$$\underset{\substack{\| \\ \text{(espace alg. parfait)} \\ \text{i.e. } \varepsilon_X : X^{p^{-\infty}} \xrightarrow{\sim} X)}}{\mathrm{AlgSp}_k^{pf}} \hookrightarrow \underset{\text{(espace alg.)}}{\mathrm{AlgSp}_k} \hookrightarrow \underset{\text{(espace)}}{\mathrm{Sp}_k} \xrightarrow{\text{restriction}} \mathrm{Sp}_k^{pf}$$

pas pleinement fidèle

Rem : X esp. alg.

$\Rightarrow (X^{p^{-\infty}})^{pf} = X^{pf}$

Lemma : $\mathrm{AlgSp}_k^{pf} \longrightarrow \mathrm{Sp}_k^{pf}$ est pleinement fidèle

Dem : Montrer $\mathrm{Hom}_{\mathrm{AlgSp}_k^{pf}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}_k^{pf}}(X^{pf}, Y^{pf})$

Si $X = \mathrm{spec}(A)$, A parfait, c'est la propriété du perfectisé de Y

En générale, il existe $\{\underset{\text{affine}}{U_i} \underset{\text{ét}}{\xrightarrow{\text{rep.}}} X\}$, et $\{\underset{\text{affine}}{V_{ijk}} \underset{\text{ét}}{\longrightarrow} U_i \times_X U_j\}$

Les U_i et les V_{ijk} sont parfaits et le morphisme $f : X \to Y$ et définit par $f_j : U_j \longrightarrow Y$ qui coïncident sur les V_{ijk} d'où le lemme $\square$

Déf : (1) Soit $\mathcal{F}$ espace parfait. On dit qu'il est rep. par un espace alg. parfait s'il est dans l'image essentielle du foncteur précédent.

(2) $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme rep par des espace alg. parfaits si

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \end{array}$$

X esp. alg. parfait $\Rightarrow \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} X$ esp. alg. parfait.

(3) P = propriété des morphismes d'espace alg. stable par changement de base

et soit $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ rep. par des EAP

On dit que "f possède P" si ...

<u>Ex</u> : Imm. ouv., imm. fermés, ét, qc.

(4) On définit les torseurs dans Sp_k^{pf} comme dans Sp_k.

(5) Un espace alg. ind-parfait est un espace parfait rep. par la $\varinjlim_{\mathbb{N}}$ d'un système d'EAP dont les transitions sont des immersions fermés.

Espaces algébriques parfaitement (localement) de présentation finie

(Laurent)

k corps parfait, $\mathrm{char}(k) = p > 0$.

<u>Déf</u> : X k-espace alg. parfait.

- X <u>localement parfaitement de type fini</u> (lptf)

  s'il existe $(U_i)_{i \in I} \longrightarrow X$ atlas étale

  avec $U_i = U_i'^{\,p^{-\infty}}$, U_i' affine de type fini $/k$.

- X <u>parfaitement de type fini</u> s'il est lptf et quasi-compact ($\Leftrightarrow |I| < \infty$ possible)

- X est <u>parfaitement de présentation fini</u> (ppf) s'il est p.t.f. et quasi-separé.

(' déperfection ')

<u>Prop</u> : X k-espace alg. parfait :

X est p.p.f. $\Longleftrightarrow$ $X = X'^{p^{-\infty}}$ où X' est un k-espace alg. de présentation finie.

<u>Lemme</u> : X/k espace alg. parfait, pfp

$\mathcal{U} \subset X$ ouvert dense

avec $\mathcal{U} = \mathcal{U}'^{p^{-\infty}}$, $\mathcal{U}'$ prés. finie sur k

Alors, $\exists$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \subset & X \\ {\scriptstyle \pi_{\mathcal{U}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathcal{U}' & \overset{j'}{\hookrightarrow} & X' \end{array} \quad \text{avec } X = X'^{p^{-\infty}}.$$

Idée si X est un schéma : On prend

$|X'| = |X|$, $\mathcal{O}_{X'} = \pi_* \mathcal{O}_X \cap j'_* \mathcal{O}_{\mathcal{U}'}$ (Serre "groupes pro-algébriques").