Construction de la grassmannienne affine en caractéristique mixte

X. Caruso 26/04/16

k corps parfait, car $p > 0$.
R une k-algèbre parfaite (variable), $n \in \mathbb{N}^*$ fixé
On avait considéré le foncteur :

$$\mathrm{Gr} : R \mapsto \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E} \quad W(R)\text{-module projectif de rg } n \\ \beta : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}_0 \end{array} \right\}$$

notation $\beta : \mathcal{E} \dashrightarrow \mathcal{E}_0$ pour désigner un iso $\beta : \mathcal{E}[1/p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0[1/p]$ où $\mathcal{E}_0 = W(R)^n$

et pour $N > 0$, Gr_N et $\overline{\mathrm{Gr}}_N$

on fixe les diviseurs élémentaires à $(N, 0, \dots, 0)$

on fixe les diviseurs élémentaires à $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_i \geq 0$ et $\mu_1 + \dots + \mu_n = N$

(implique que le β ci-dessus est un "vrai" morphisme)

Le $\overline{\mathrm{Gr}}_N$ sera en fait (a posteriori) l'adhérence de Gr_N, ce qui explique la notation.

<u>Objectif</u> : Mq $\overline{\mathrm{Gr}}_N$ est représentable par un k-espace algébrique parfait parfaitement propre.

Pour appliquer la prop A.26 de [Zhu] on doit construire X, H avec X schéma affine parfait
H schéma en groupes affine parfait
+ action propre et libre de H sur X tq $[X/H] \simeq \overline{\mathrm{Gr}}_N$

+ Y un k-espace alg. parfait ppf

avec un morphisme $\pi : Y \to \overline{Gr}_N$ qui est

représentable, parfaitement propre, à fibres géom. connexes

On fixe un entier $h > N$ et on regarde :

$$X(R) = \overline{Gr}_{N,h}(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta, \bar{\varepsilon}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathcal{E}, \beta) \in \overline{Gr}_N(R) \\ \bar{\varepsilon} : \mathcal{E}_0/p^h \simeq \mathcal{E}/p^h \end{array} \right\} / \sim$$

$H = L^h GL_n$ i.e. $H(R) = GL_n(W_h(R))$

qui agit sur X en changeant $\bar{\varepsilon}$

Clairement $X \to \overline{Gr}_N$ est un torseur sous H.

$$V_{N,h}(R) = \{ A \in L^h \mathrm{Mat}_n(R) \text{ tq } \det A = p^N (\text{unité}) \}$$

provient de la condition $\mu_1 + \dots + \mu_n = N$

Note que $V_{N,h}$ est clairement représentable par le perfectisé d'un truc explicite.

$$J(R) = \{ (A, \gamma) \in V_{N,h}(R) \times L^h GL_n(R) \text{ tq } A\gamma = A \}$$

<u>Lemme clé</u> : $\overline{Gr}_{N,h} \simeq J$ en tant que k-espaces

non canonique

L'intérêt est que comme J est clairement représentable, on le déduit pour $\overline{Gr}_{N,h}$.

Dém : on a un morphisme :

$$\mu : \overline{Gr}_{N,h}(R) \longrightarrow V_{N,h}(R)$$
$$(\mathcal{E}, \beta, \bar{\varepsilon}) \longmapsto \left(\text{matrice de } \mathcal{E}_0/p^h \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \mathcal{E}/p^h \xrightarrow{\beta \bmod p^h} \mathcal{E}_0/p^h\right)$$

Ce morphisme admet une section algébrique : commençons par fixer une section s de $L^+GL_n \to L^hGL_n$

$$(\text{i.e. } s_R : GL_n(W_h(R)) \longrightarrow GL_n(W(R))),$$

puis on fabrique $\sigma = \sigma_R : V_{N,h}(R) \longrightarrow \overline{Gr}_{N,h}(R)$

$$A \longmapsto (\mathcal{E}_0, s_R(A), id)$$

De plus : * $(\mathcal{E}_1, \beta_1, \bar{\varepsilon}_1)$ et $(\mathcal{E}_2, \beta_2, \bar{\varepsilon}_2)$ ont même image A par μ ssi il existe $\gamma \in L^hGL_n(R)$ (nécess. unique) tq $A\gamma = A$ et $\bar{\varepsilon}_1 = \gamma \cdot \bar{\varepsilon}_2$.

La section σ permet de construire

$$J(R) \longrightarrow \overline{Gr}_{N,h}(R)$$
$$(A, \gamma) \longmapsto (\mathcal{E}_0, s_R(A), \gamma)$$

qui est un iso par la remarque qui précède ☒

Vérifions que l'action de H sur X est propre.

On doit mq $H \times X \to X \times X$ est une immersion fermée.

Soit $\operatorname{Spec}(R) \to X \times X$ un R-point, i.e

$$(\mathcal{E}_1, \beta_1, \bar{\varepsilon}_1) \text{ et } (\mathcal{E}_2, \beta_2, \bar{\varepsilon}_2) \in \overline{Gr}_{N,h}(R).$$

Alors $\operatorname{Spec}(R) \times_{X \times X} H \times X$ est défini par les conditions que $\beta_2^{-1} \circ \beta_1 : \mathcal{E}_1[1/p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2[1/p]$ induise un isom $\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_2$ (i.e : $\operatorname{inv}(\beta_2^{-1} \circ \beta_1) = \omega_0 = (0, \dots, 0)$).

$$\left[h = (\beta_2 \circ \bar{\varepsilon}_2)^{-1} \circ (\beta_1 \circ \bar{\varepsilon}_1) \right]$$

C'est une condition fermée (déjà vu) qui définit le sous-schéma $(\operatorname{Spec} R)_{\omega_0}$. cqfd.

On définit

$$Y(R) = \widetilde{Gr}_N(R) = \left\{ \mathcal{E}_N \xrightarrow{\beta_N} \mathcal{E}_{N-1} \to \dots \xrightarrow{\beta_2} \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{E}_0 \right\}$$
$$\text{tq. } \operatorname{inv}(\beta_i) = (1, 0, \dots, 0)$$

fibration itérée en grassmanniennes (ordinaires)

ceci signifie que $\operatorname{coker}(\beta_i)$ est annulé par p et est un R-module projectif de rang 1.

On dispose du morphisme

$$\pi : \widetilde{Gr}_N(R) \longrightarrow \overline{Gr}_N(R)$$
$$(\beta_1, \dots, \beta_N) \longmapsto \beta = \beta_1 \circ \dots \circ \beta_N$$

qui est intéressant parce que c'est une résolution des sing.

<u>Prop</u>: $\widetilde{Gr}_N$ est représentable par un k-schéma parfait parfaitement propre.

<u>Dém</u> réc sur N $\boxtimes$ (pas complètement évident)

<u>Prop</u>: π est représentable, parfaitement propre, et à fibres géométriques connexes.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{Gr}_N \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r, "x"] & \overline{Gr}_N \end{tikzcd}$$

Dém : La fibre au-dessus de $x : \mathrm{Spec}\, R \to \overline{Gr}_N$, qui détermine un $(\mathcal{E}, \beta) \in \overline{Gr}_N(R)$, est la solution du problème de modules :

$$(R'/R) \longmapsto \left\{ \mathcal{E}_N \xrightarrow{\beta_N} \mathcal{E}_{N-1} \to \dots \to \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{E}_0 \right\}$$

$$\text{avec } \underbrace{(\mathcal{E}_N, \beta_1 \circ \dots \circ \beta_N) \simeq (\mathcal{E}, \beta)_{R'}}_{inv(\beta_1 \circ \dots \circ \beta_N \circ \beta^{-1}) = \omega_0}$$

et est donc représentable par $(Y_R)_{\omega_0}$ qui est un schéma projectif sur $\mathrm{Spec}(R)$. Reste à voir que ce truc est connexe lorsque R $\underbrace{\text{est alg.}}_{\text{un corps}}$ clos.

$$Z_N = (\mathrm{Spec}\, R) \times_{\overline{Gr}_N} \widetilde{Gr}_N$$

$\downarrow$ fibration en espaces projectifs

Z_{N-1} qui classifie les $\mathcal{E}_{N-1} \xrightarrow{\beta_{N-1}} \dots \xrightarrow{\beta_1} \mathcal{E}_0$

$\downarrow$ qui peuvent se compléter en $\mathcal{E}_N \xrightarrow{\beta_N} \dots$

Z_{N-2} $(\Leftrightarrow \mathcal{E}_{N-1} \supset x^* \mathcal{E})$

$\vdots$

$\downarrow$

$\mathrm{Spec}(R)$ $\boxtimes$

<u>Remarques</u>

* π est un isomorphisme au-dessus de Gr_N

en effet : si $(\mathcal{E}, \beta) \in Gr_N(R)$, alors $inv(\beta) = (N, 0, \dots, 0)$ donc $\mathrm{coker}(\beta)$ est projectif de rang 1 sur $W_N(R)$.
Il admet une unique filtration dont le gradué est projectif de rang n sur R : $\mathcal{E}_i = \mathcal{E} + p^i \mathcal{E}_0$.

* par contre, les fibres au-dessus des points de $\overline{Gr}_N \setminus Gr_N$ sont toutes de dim ≥ 1.

* Zhu affirme que (voir § B.3)

$$\widetilde{Gr}_1 = \mathbb{P}^{n-1, p^{-\infty}}$$

$$\widetilde{Gr}_2 = \mathbb{P}^{p^{-\infty}}(\Omega_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$$

et dit que $\widetilde{Gr}_n$ pour $n \geq 3$ n'est plus ce à quoi on s'attend à partir de la car. 0.