Construction de la grassmannienne affine en caractéristique mixte

X. Caruso, 15/03/2016

k corps parfait
R désignera une k-algèbre (le plus souvent) parfaite
$\rightsquigarrow W(R) = \{(x_0, x_1, \dots) \in R^{\mathbb{N}}\}$
Si $x \in R$, $[x] = (x, 0, 0, \dots)$ rep. de Teichmüller ; multiplicatif

$p = (0, 1, 0, 0, \dots)$
$p(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0^p, x_1^p, x_2^p, \dots)$

1. Définition de la grassmannienne affine

Soit $\mathcal{X}/W(k)$ un schéma affine
On définit, pour R une k-algèbre parfaite :

$$L^+\mathcal{X}(R) = \mathcal{X}(W(R))$$
$$L^h\mathcal{X}(R) = \mathcal{X}(W_h(R)) \quad \text{pour } h \geq 1$$
$$L\mathcal{X}(R) = \mathcal{X}(W(R)[1/p])$$

Prop : i) $L^+\mathcal{X}$ et $L^h\mathcal{X}$ sont des perfectisés de k-schémas
(= des k-schémas parfaits)
ii) $L\mathcal{X}$ est représentable par un ind-schéma parfait

Dém : i) le foncteur $L_p^+\mathcal{X} : S \mapsto \mathcal{X}(W(S))$ est
S : k-alg quelconque

représentable par un k-schéma, résultat classique de Greenberg. (utilise $\mathcal{X}$ affine !). Alors L^+ est son perfectisé.
Même argument avec L^h et ici pour tout $\mathcal{X}$, non nécess affine.

ii) Si R est parfait, $x \in W(R)$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{i \geq 0} p^i [x_i]$ et $x \in W(R)[1/p]$ s'écrit $x = \sum_{i \gg -\infty} p^i [x_i]$. Sur cette écriture, la somme et le produit sont donnés par des polynômes en les $x_i^{p^{-n}}$. Ceci conclut (exercice) ⊠

Déf Grassmannienne affine : $Gr = [LGL_n / L^+GL_n]$ comme faisceau fpqc (ou espace parfait)

Rem: on définit de même la grassmannienne affine pour un groupe réductif G.

Description alternative :

$$Gr(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ un } W(R)\text{-module proj. de rang } n \\ \text{et } \beta : \mathcal{E}[1/p] \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_0[1/p] \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

où $\mathcal{E}_0 = W(R)^n$. Ici $\beta(\mathcal{E})$ est un réseau dans $\mathcal{E}_0[1/p] = W(R)[1/p]^n$.

Objectif : montrer que Gr est représentable par un espace algébrique parfait ind-parfaitement propre.

On va utiliser : (Zhu A.26) (trouvé au 15.03)

Prop Soit H un schéma en groupes parfait affine ppf qui agit sur X un schéma affine parfait ppf tq l'action est libre et propre. On suppose qu'il existe Y schéma ppf et $\pi : Y \to X/H$ un morphisme représentable, parfaitement propre, et à fibres géométriques connexes. Alors X/H est représentable par un espace algébrique parfait ppf ⊠

faisceau quotient

2. Stratification par les diviseurs élémentaires

<u>Rappel</u> si $L \subset W(k)[1/p]^n$ est un réseau, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $W(k)^n$ et des entiers relatifs $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ tq $(p^{\mu_1} e_1, \dots, p^{\mu_n} e_n)$ base de L.

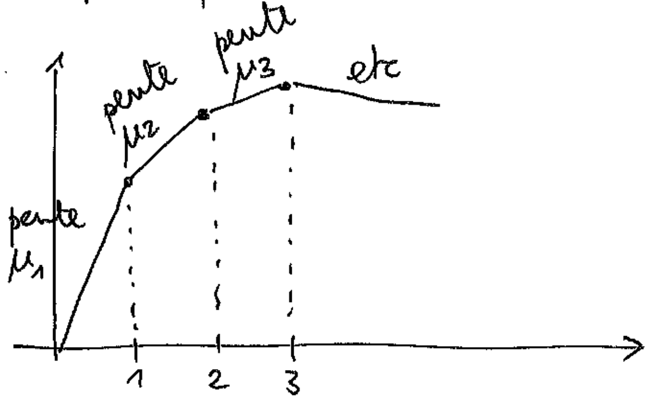
<u>Not</u>: $\mathrm{Inv}(L) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$.

$$C = \{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ tq } \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n\}$$

Relation d'ordre sur C:

$$\lambda \leq \mu \text{ ssi } \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \dots + \mu_i \quad \forall i \\ \text{et } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mu_1 + \dots + \mu_n \end{cases}$$

Représentation graphique : par des polygones de Newton



$\lambda \leq \mu$ ssi son pol. est en-dessous de celui de μ.

<u>Prop</u>: Soit $(\mathcal{E}, \beta) \in Gr(R)$, R parfaite. On lui associe la fonction

$$\mu_{\mathcal{E},\beta} : \mathrm{Spec}\, R \to C$$
$$\mathfrak{p} \mapsto \text{les invariants de } \mathcal{E} \otimes \kappa(\mathfrak{p})$$

Cette fonction est semi-continue inférieurement.

En particulier, pour $\mu \in C$ fixé,

$$(\mathrm{Spec}\, R)_{\leq \mu} = \{x \in \mathrm{Spec}\, R \text{ tq } \mu_{\mathcal{E},\beta}(x) \leq \mu\}$$

est fermé, et $(\mathrm{Spec}\, R)_\mu$ est ouvert dans $(\mathrm{Spec}\, R)_{\leq \mu}$.

En particulier, pour le point $\omega_0 = (0, \dots, 0) \in C$ qui est minimal, on a $(\operatorname{Spec} R)_{\omega_0} = (\operatorname{Spec} R)_{\leq \omega_0}$ fermé.

Dém : c'est classique $\boxtimes$

Si $\mu \in C$ on définit :

$$\mathrm{Gr}_{\leq \mu}(R) = \{ (\mathcal{E}, \beta) \in \mathrm{Gr}(R) \text{ tq } \mu_{\mathcal{E},\beta} \leq \mu \}$$

$$\mathrm{Gr}_{\mu}(R) = \{ (\mathcal{E}, \beta) \in \mathrm{Gr}(R) \text{ tq } \mu_{\mathcal{E},\beta} = \mu \}$$

$$\overline{\mathrm{Gr}}_N = \mathrm{Gr}_{\leq (N,0,\dots,0)}$$

Note : $\overline{\mathrm{Gr}}_N \hookrightarrow \overline{\mathrm{Gr}}_{N+1}$ (imm fermée)

On souhaite mq $\overline{\mathrm{Gr}}_N$ est un sp. alg. parfait ppf.

3. Construction de X et H

$$\overline{\mathrm{Gr}}_N(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \in \mathrm{Gr}(R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \beta \text{ induit } \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0 \\ \text{tq } \Lambda^n \beta(\mathcal{E}) \subset p^N \Lambda^n \mathcal{E}_0 \end{array} \right\}$$

Rem : si $L \subset W(k)^n$ et $\Lambda^n L \supset p^N \Lambda^n W(k)^n$ alors :

$$p^N W(k) \subset L.$$

Donc L est déterminé par son image dans $W(k)^n / p^N W(k)^n$ $\boxtimes$

Soit $h \geq N$ fixé (peut-on prendre $h = N$?)

$$\overline{\mathrm{Gr}}_{N,h}(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta, \bar{\varepsilon}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\mathcal{E},\beta) \in \overline{\mathrm{Gr}}_N(R) \\ \bar{\varepsilon} : \mathcal{E}_0/p^h \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}/p^h \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

$\mathcal{E}_0 = W(R)^n$

où $\sim$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_0/p^h & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \mathcal{E}/p^h \\ \| & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{E}_0/p^h & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}'} & \mathcal{E}'/p^h \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{E}_0 \\ \downarrow \exists \varphi & & \| \\ \mathcal{E}' & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{E}_0 \end{array}$$

Notre X sera $\overline{Gr}_{N,h}$.

le H sera $L^h Gl_n$, il agit sur X en changeant $\overline{\mathcal{E}}$.

On a $H = (L_p^h Gl_n)^{p^{-\infty}}$ donc est un schéma parfait ppf.

Le morphisme $\overline{Gr}_{N,h} \longrightarrow \overline{Gr}_N$ est un H-torseur

On va montrer que X est le perfectisé d'un schéma affine de type fini.

On introduit :

$$V_{N,h}(R) = \{A \in M_n(W_h(R)) \text{ telle que } \det A = p^N(\text{unité})\}$$

C'est représentable par le perfectisé d'un schéma affine de type fini.

Puis

$$J(R) = \{(A,\gamma) \in V_{N,h}(R) \times \overbrace{Gl_n(W_h(R))}^{L^h Gl_n(R)} \text{ tq } A\gamma = A\}$$

C'est représentable par le perfectisé d'un k-schéma affine de type fini.

<u>Lemme clé</u> : On a $J \simeq \overline{Gr}_{N,h}$ en tant qu'espaces parfaits.

non canonique, dépend du choix d'une section k-alg de $L^+Gl_n \to L^h Gl_n$ [par ex : $(x_0, x_1, \dots, x_{h-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{h-1}, 0, \dots)$]