$\boxed{\text{Platitude}}$

Est-ce qu'une immersion fermée de schémas $i\colon Y \hookrightarrow X$ peut être plate ? Pour écarter le cas trivial où Y est une union de composantes connexes de X, et la question de la platitude étant de toute façon locale sur X, on suppose avoir localisé en un point $x \in Y$ de sorte que X est local. Alors dans les cas courants la réponse est non comme le montrent les deux remarques suivantes :

Lemme 0.1 *Si Y est défini par un idéal de type fini (par exemple si X est localement nœthérien) alors i n'est pas plate.*

Démonstration : En effet i est plate ssi on a $IJ = I \cap J$ pour tout idéal $J \subset A$. En particulier on doit avoir $I = I^2$, donc $I = 0$ par le lemme de Nakayama. □

Lemme 0.2 *Si Y est inclus dans un diviseur de Cartier (par exemple si X est localement intègre) alors i n'est pas plate.*

Démonstration : En effet par hypothèse il existe un $x \in I$ non diviseur de zéro. Si on pose $J = (x)$ il est facile de voir que les éléments de IJ s'écrivent tous ix avec $i \in I$. De là il découle que $x \in I \cap J$ ne peut appartenir à IJ si $I \neq A$. □

Ces lemmes disent en particulier que pour que $i\colon Y \hookrightarrow X$ soit plate il faut que l'idéal de Y ne soit pas de type fini et constitué entièrement de diviseurs de zéro. Voici donc un exemple où le phénomène se produit :

Exemple 0.3 Considérons l'anneau suivant, quotient d'un anneau de polynômes en un nombre dénombrable de variables,

$$A = \frac{k[x_1, x_2, x_3, \dots]}{(x_n - x_n x_{n+1}, n \in \mathbb{N})}$$

On regarde l'idéal I engendré par les x_n, qui est aussi la réunion croissante des idéaux (x_n). Il est facile de voir que pour $f \in A$, on a $f \in I$ ssi $f = fx_n$ pour un n (en fait, pour tout $n \gg 0$). Partant de là pour tout idéal $J \subset A$ on aura $f \in I \cap J \;\Rightarrow\; f = fx_n \;\Rightarrow\; f \in IJ$ donc $IJ = I \cap J$. Remarque : une autre façon de voir que A/I est A-plat est de dire qu'il suffit de le tester en le localisé de A en l'idéal maximal I or $A_I \simeq k$ en suite de quoi la platitude est évidente.

Remarque : cela donne un exemple d'un module fini et plat sur A, mais non localement libre.

On pourrait dire que c'est *l'idéal des polynômes à support compact* en référence à l'analogie suivante. Soit A' l'anneau des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et, pour chaque $n \geq 1$, soit ψ_n une fonction à support dans $[-(n+1);(n+1)]$ avec $\psi_n(x) = 1$ sur $[-n;n]$. Soit I' l'idéal des fonctions à support compact, engendré par les fonctions ψ_n qui vérifient $\psi_n = \psi_n\psi_{n+1}$. Ici aussi la surjection canonique $A' \to A'/I'$ est plate. En fait il est probable que la sous-$\mathbb{R}$-algèbre de A' engendrée par les ψ_n est isomorphe à $\frac{\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, \dots]}{(x_n - x_n x_{n+1}, n \in \mathbb{N})}$.